Ecuaciones diferenciales ordinarias

Andrés Laín Sanclemente

31 de mayo de 2019

Índice

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (introducción)

Definición 1. Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparecen una función (variable dependiente) de una variable (variable independiente) y sus derivadas.

Buscamos soluciones de dicha ecuación que cumplan algunas condiciones adicionales.

1.1. Notación

1.1.1. Notación de Lagrange

Una función se representa como $y = y(x)$ y la derivada es $y'(x)$.

1.1.2. Notación de Newton

Una función se representa como $x = x(t)$ y la derivada es $\dot{x}(t)$. Nosotros vamos a usar la notación de Newton.

1.2. Ecuación diferencial genérica

Será de la forma:

$$\varphi\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0$$

que se dice que tiene orden n.

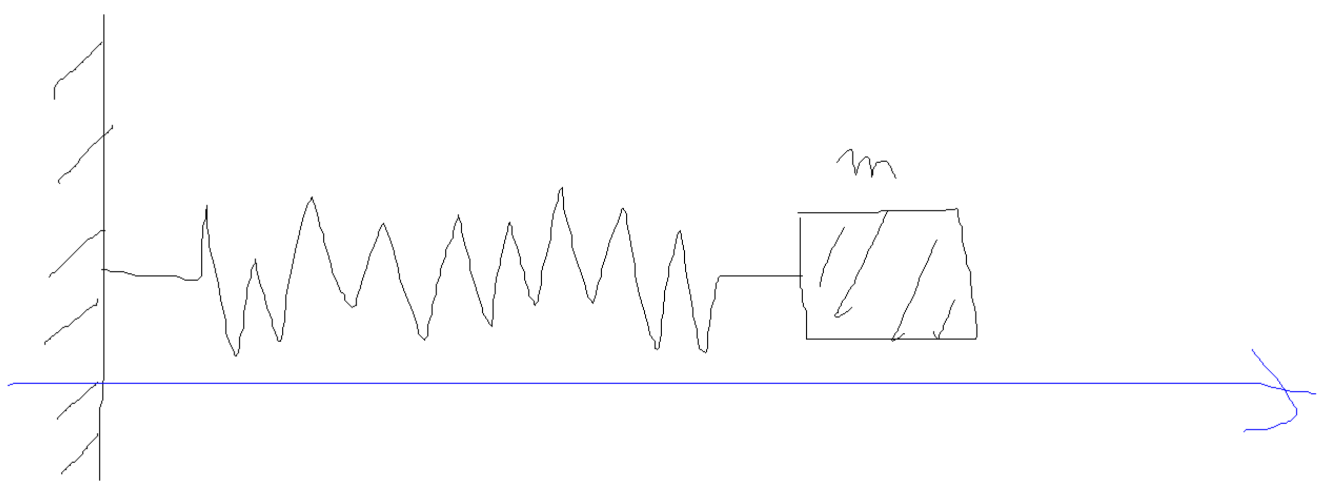
Se dice que una $x = g(t)$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que cumple:

$$\varphi\left(t, g(t), \frac{dg}{dt}(t), \frac{d^2g}{dt^2}(t), \ldots, \frac{d^ng}{dt^n}(t)\right) = 0 \ \forall t \in I$$

es una solución de la ecuación diferencial. Por tanto:

Observación 1. Una función cuyo dominio no es un intervalo nunca será solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1. Tenemos un muelle:



Según la ley de Hooke, $F = -kx$. Por otra parte, según la segunda ley de Newton: $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

Así llegamos a la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que es una ecuación de orden dos.
Una solución es $x = \cos(\omega t)$ donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Veamos que efectivamente es solución:

$$\dot{x} = -\omega \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + kx = -m\omega^2 \cos(\omega t) + k\cos(\omega t) = \left(k - m\omega^2\right)\cos(\omega t) = 0 \cdot \cos(\omega t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

2. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

2.1. Ecuaciones de primer orden

Una ecuación lineal de orden uno es una ecuación de la forma:

$$\dot{x} = a(t)\,x + b(t)$$

donde a y b son funciones definidas en un intervalo. Si a es constante, entonces la ecuación se dice de coeficientes constantes:

$$\dot{x} = \alpha x + b(t)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $b(t) = 0 \ \forall t$, la ecuación se dice homogénea.

2.1.1. Solución de la ecuación homogénea

$$\dot{x} = \alpha x$$

Una solución es:

$$x = e^{\alpha t}$$

Comprobamos:

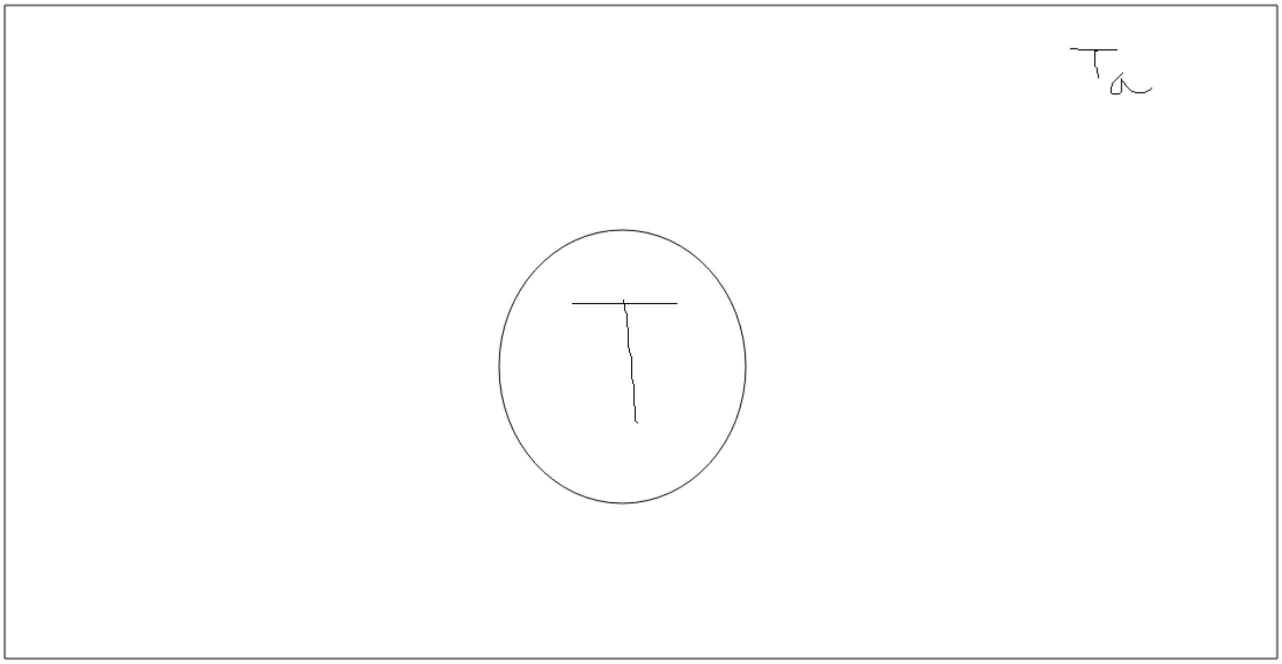
$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}$$

$$\alpha x = \alpha e^{\alpha t}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.
Ambas expresiones son equivalentes, luego $e^{\alpha t}$ es solución.
También hay otras soluciones como $x = 0$ o $x = Ae^{\alpha t}$.

- Si $x = 0$, $\dot{x} = 0 = \alpha x = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$
- Si $x = Ae^{\alpha t}$, $\dot{x} = A\alpha e^{\alpha t}$. Por otra parte: $\alpha x = \alpha A e^{\alpha t}$. Ambas expresiones son iguales, luego es solución.

Ejemplo 2 (ley del enfriamiento)**.** Tenemos una bola a una temperatura T en una zona a temperatura ambiente T_a:



donde $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$.
Definimos $x := T - T_a$. Así, nuestra ecuación diferencial queda:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) = -kx$$

Por tanto, la solución es:

$$x(t) = Ae^{-kt}$$

Así que (despejando $T(t)$):

$$T(t) = T_a + Ae^{-kt}$$

Conocemos (hemos medido) la condición inicial:

$$T(0) = T_0$$

Calculemos $T(0)$ de otro modo y hallemos el valor de A:

$$T(0) = T_a + A = T_0 \Leftrightarrow A = T_0 - T_a$$

De manera que la solución final es:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Normalmente resolveremos problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En este caso, una solución es una función $x = g(t)$ con dominio $I \subset \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt}(t) = \alpha g(t) \\ g(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2.1.2. Problema de valor inicial

Teorema 1. *El problema de valor inicial* $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *tiene una única solución* $x = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ *con* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración.

- Comprobamos que es solución:

  Es solución de la ecuación diferencial:

  $$\dot{x} = x_0 \alpha e^{\alpha(t-t_0)} = \alpha x_0 e^{\alpha(t-t_0)} = \alpha x$$

  y satisface la condición inicial:

  $$x(t_0) = x_0 e^{\alpha(t_0-t_0)} = x_0 e^0 = x_0 \cdot 1 = x_0$$

- Unicidad:

  Sea $y(t)$ una solución. Considero la función $z(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} y(t)$. Entonces:

  $$\frac{dz}{dt}(t) = -\alpha e^{-\alpha(t-t_0)} y(t) + e^{-\alpha(t-t_0)} \dot{y}(t) \overset{\dot{y}(t)=\alpha y(t)}{=} -\alpha e^{-\alpha(t-t_0)} y(t) + e^{-\alpha(t-t_0)} \alpha y(t) = 0$$

  $\forall t \in \mathbb{R}$. Por tanto, z es una función constante $z(t) = c \; \forall t \in \mathbb{R}$. Evaluando en $t = t_0$, se obtiene:

  $$c = z(t_0) = e^{-\alpha(t_0-t_0)} y(t_0) = y(t_0) = x_0$$

  Ahora despejamos $y(t)$ de:

  $$z(t) = x_0 = e^{-\alpha(t-t_0)} y(t)$$

  obteniendo:

  $$y(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

  es decir, $y(t)$ es la solución que ya tenía.

□

Observación 2. Puede verse que a partir de una ecuación «complicada», hemos obtenido una sencilla $\dot{z} = 0$. Haremos esto muchas veces.

Ejercicio 1. Hallar la solución de:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

Solución 1.

$$x(t) = 2e^{3(t-1)}$$

2.1.3. Solución de la ecuación no homogénea

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Caso $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En este caso la solución es (por el Teorema Fundamental del Cálculo):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, d\tau$$

Caso homogéneo $b = 0$: Ya sabemos que la solución es:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

Caso general:

Teorema 2. *Sea $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con I intervalo. Sea $t_0 \in I$. El problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo I dada por:

$$x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} b(\tau)\, d\tau$$

Demostración. Partimos de:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Pasando términos al otro lado, obtenemos:

$$\dot{x} - \alpha x = b(t)$$

Ahora, definimos una función $z(t)$ de la siguiente forma:

$$z(t) := e^{-\alpha(t-t_0)} x(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} z(t)$$

A continuación, derivamos $x(t)$:

$$\dot{x} = \underbrace{\alpha e^{\alpha(t-t_0)}}_{\alpha x} z + e^{\alpha(t-t_0)}\dot{z}$$

Luego:

$$b(t) = \dot{x} - \alpha x = \alpha e^{\alpha(t-t_0)} z + e^{\alpha(t-t_0)}\dot{z} - \alpha e^{\alpha(t-t_0)} z =$$

$$= e^{\alpha(t-t_0)}\dot{z}$$

Por otra parte:

$$z(t_0) = e^{-\alpha(t_0-t_0)} x(t_0) = x(t_0) = x_0$$

Por tanto, hemos llegado al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{z} = e^{-\alpha(t-t_0)} b(t) \\ z(t_0) = x_0 \end{cases}$$

y este problema ya lo sabemos resolver: es el caso $\alpha = 0$. Luego:

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(\tau-t_0)} b(\tau)\, d\tau$$

Ahora, volvemos a la expresión que teníamos para $x(t)$:

$$x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} z(t) =$$

$$= e^{\alpha(t-t_0)} x_0 + e^{\alpha(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(\tau-t_0)} b(\tau)\, d\tau$$

Como $e^{\alpha(t-t_0)}$ no depende de τ, podemos meterlo en la integral:

$$x(t) = e^{\alpha(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-t_0)} e^{-\alpha(\tau-t_0)} b(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{\alpha(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} b(\tau)\, d\tau$$

□

Ejercicio 2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + t \\ x(1) = 5 \end{cases}$

Solución 2. En este caso, $b(t) = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

Hallamos cada sumando de la solución por separado:

$$e^{\alpha(t-t_0)} x_0 = 5e^{3(t-1)}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} b(\tau)\, d\tau = \int_{1}^{t} e^{3(t-\tau)} \tau d\tau = e^{3t} \int_{1}^{t} e^{-3\tau} \tau d\tau = \frac{1}{9}\left(4e^{3(t-1)} - 1\right) - \frac{1}{3}t$$

Así:

$$x(t) = 5e^{3(t-1)} + \frac{1}{9}\left(4e^{3(t-1)} - 1\right) - \frac{1}{3}t$$

Observación 3. La solución se puede escribir: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ donde $x_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales dadas:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

mientras que $x_p(t)$ es la solución de la ecuación completa con condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + b(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

2.1.4. Ecuaciones complejas

Ahora, vamos a estudiar qué ocurre si las funciones x y b son complejas, pero de variable real.

$$\dot{x} = \alpha x + b(t)$$

donde $x, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$.

Recordatorio:

$$\frac{d}{dt} e^{t(\alpha + i\omega)} = \frac{d}{dt} e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = (\alpha + i\omega) e^{t(\alpha + i\omega)}$$

La solución única es:

$$x(t) = e^{\alpha(t - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t - \tau)} b(\tau)\, d\tau$$

Ejercicio 3. $\begin{cases} \dot{x} = ix + 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

Solución 3.

$$x_h(t) = 2e^{it}$$

$$x_p(t) = \int_0^t e^{i(t-\tau)} d\tau = e^{it} \int_0^1 e^{-i\tau} d\tau = e^{it} \frac{1}{-i} \left[e^{-i\tau} \right]_0^t = ie^{it} \left(e^{-it} - 1 \right) = i \left(1 - e^{it} \right)$$

De esta forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = 2e^{it} + i \left(1 - e^{it} \right) = (2 - i) e^{it} + i$$

2.2. Ecuaciones de segundo orden

Son de la forma:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t)$$

Hay dos tipos:

- Caso homogéneo $f = 0$.
- Caso no homogéneo $f \neq 0$.

2.3. Ecuaciones de segundo orden: solución de la ecuación homogénea

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$$

Las siguientes funciones son soluciones: $x = e^{st}$, $A\sin(\omega t)$, $B\cos(\omega t)$, 0.

$$x = e^{st}$$

$$\dot{x} = se^{st}$$

$$\ddot{x} = s^2 e^{st}$$

Llegamos a:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = \alpha s^2 e^{st} \alpha s e^{st} + \beta e^{st} = \left(\alpha s^2 + \alpha s + \beta\right) e^{st} = 0 \; \forall t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 + \alpha s + \beta = 0$$

Ejemplo 3.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

Sabemos que la solución es del estilo $x = e^{st}$. También sabemos que la s es la solución de:

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Las soluciones son $s = -2$ y $s = -1$. Luego las soluciones del ejercicio son:

$$x = \begin{cases} e^{-2t} \\ e^{-t} \end{cases}$$

Puedo multiplicar las soluciones por cualquier constante y siguen siendo solución.

Evidentemente si $s = \lambda_1$ y $s = \lambda_2$ son soluciones de la ecuación característica, entonces:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

así como cualquier combinación lineal de ellas. En efecto si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones, entonces $x = Ax_1 + Bx_2$ con A, B constantes es solución:

$$\dot{x} = A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2$$

$$\ddot{x} = A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2 + \alpha A\dot{x}_1 + \alpha B\dot{x}_2 + \beta A x_1 + \beta B x_2 =$$

$$= A\underbrace{\left(\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + \beta x_1\right)}_{=0} + B\underbrace{\left(\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + \beta x_2\right)}_{=0}$$

No podemos probarlo ahora, pero todas las soluciones son de la forma:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Ejercicio 4. Hallar las soluciones de:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Solución 4. Tenemos el polinomio característico:

$$s^2 + 3s + 2 = (s+2)(s+1)$$

$$x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

$$\dot{x} = -2Ae^{-2t} - Be^{-t}$$

Llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 1 = x(0) = A + B \\ 0 = \ddot{x}(0) = -2A - B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Así que la solución única es:

$$x(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$$

2.3.1. Raíces complejas

Ejercicio 5. Resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

Solución 5. Lo resolvemos:

$$p(s) = s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm i$$

$$x(t) = Ae^{(-1+i)t} + Be^{(-1-i)t}$$

$$\dot{x}(t) = (-1+i)Ae^{(-1+i)t} + (-1-i)Be^{(-1-i)t}$$

De muevo llegamos a un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 1 = x(0) = A + B \\ -1 = \dot{x}(0) = (-1+i)A + (-1-i)B \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2}e^{(-1-i)t}$$

Aplicando el teorema de Euler $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t}[\cos t + i\sin t + \cos t - i \sin t] = e^{-t}\cos t$$

Observación 4 (Raíces complejas). Si la ecuación es real, las soluciones deben ser reales. La solución debe ser del estilo:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{\overline{\lambda} t}$$

donde λ y $\overline{\lambda}$ son las soluciones de la ecuación característica.

$$\overline{x}(t) = \overline{A}e^{\overline{\lambda} t} + \overline{B}e^{\lambda t}$$

$$x(t) \text{ es real} \Leftrightarrow x(t) = \overline{x}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{B} = A \\ \overline{A} = B \end{cases}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + \overline{A}e^{\overline{\lambda} t} = 2\mathrm{Re}\left(Ae^{\lambda t}\right)$$

$$Ae^{\lambda t} \underbrace{=}_{\begin{cases} A := a + ib \\ \lambda := \alpha + i\omega \end{cases}} (a+ib)\, e^{(\alpha + i\omega)t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)(a + ib) =$$

$$= e^{\alpha t}(a \cos \omega t - b \sin \omega t) + i\,()$$

En definitiva, la solución general de $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0$ cuando $\lambda = \tilde{\alpha} \pm i\omega$ son las raíces de la ecuación característica, se puede escribir:

$$x(t) = e^{\alpha t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Volvemos al ejemplo:

$$x(t) = e^{-t}(a \cos t + b \sin t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-t}(a \cos t + b \sin t) + e^{-t}(-a \sin t + b \cos t)$$

Llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = x(0) = a \\ -1 = \dot{x}(0) = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t} \cos t$$

2.3.2. Caso en el que haya raíces dobles

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$$

$$s^2 - 2s + 1 = 0 \Leftrightarrow (s-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

La solución es del estilo:

$$x(t) = Ae^{t}$$

Imaginemos que tenemos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = 1 = A \\ \dot{x}(0) = 0 = A \end{cases}$$

No hay solución de la forma anterior, falta otra solución.

Si $p(s) = s^2 + \alpha s + \beta$ tiene una raíz doble $s = \lambda$. Se cumple $(p(\lambda) = 0, p'(\lambda) = 0)$. Tenemos soluciones de la forma $Ae^{\lambda t}$ y necesitamos más soluciones. Buscamos soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t} z(t)$ con z una función a determinar.

$$x = e^{\lambda t} z$$

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t} z + e^{\lambda t} \dot{z}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} z + 2\lambda e^{\lambda t} \dot{z} + e^{\lambda t} \ddot{z}$$

$$0 = p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

$$0 = p'(\lambda) = 2\lambda + \alpha$$

Así $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 = \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = e^{\lambda t}\left[\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \alpha\dot{z} + \lambda^2 z + \alpha\lambda z + \beta z\right] =$$

$$= e^{\lambda t}\left[\ddot{z} + (2\lambda + \alpha)\dot{z} + \left(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta\right) z\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \left(\underbrace{2\lambda + \alpha}_{=p'(\lambda)=0}\right)\dot{z} + \left(\underbrace{\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta}_{=p(\lambda)=0}\right) z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} = 0$$

En definitiva, $x = e^{\lambda t} z$ es solución si y solo si $\ddot{z} = 0$, es decir, si y sólo si $z = A + Bt$ (un polinomio de grado uno). Por lo tanto, la solución general es:

$$x(t) = e^{\lambda t}(A + Bt)$$

Ejercicio 6. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

Solución 6. $\lambda = 1$ es doble. Luego la solución es de la forma:

$$x(t) = e^t(A + Bt)$$

$$\dot{x}(t) = e^t(A + Bt) + e^t B$$

Llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = x(0) = A \\ 0 = \dot{x}(0) = A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

La solución final es:

$$x(t) = e^{t}(1-t)$$

2.3.3. Resumen

Conclusión 1. Para hallar la solución general de $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ resuelvo la ecuación característica $p(s) = s^2 + \alpha s + \beta = 0$.

Si tiene dos raíces distintas λ_1 y λ_2, la solución general es:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

con A, B constantes (reales si las raíces son reales, complejos si las raíces son complejas).

Si tiene una raíz doble $s = \lambda$ la solución general es:

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{\lambda t}$$

Si las raíces son complejas $\lambda = a + i\omega$ con $\omega \neq 0$ se puede poner la expresión alternativa:

$$x(t) = e^{at}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

2.4. Ecuaciones de segundo orden: solución de la ecuación no homogénea

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

donde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo con $t_0 \in I$. Vamos a hacer algo similar al caso de primer orden.

Teorema 3. *El problema de valor inicial anterior tiene una única solución definida en I que se puede escribir en la forma: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ donde:*

x_h es la solución de la ecuación homogénea con las condiciones iniciales dadas.

x_p tiene la siguiente expresión:

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

donde γ es la solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$.

Demostración. La veremos más adelante en el caso general. □

Observación 5. La función γ que aparece en el teorema se llama función de Green por el problema de Cauchy (o de valor inicial).

Ejercicio 7. $\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2t \\ x(1) = 3 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases}$

Solución 7. Primero, resolvemos la ecuación homogénea con las condiciones iniciales dadas:

$$\begin{cases} \ddot{x}+2\dot{x}+x=0 \\ x\left(1\right)=3 \\ \dot{x}\left(1\right)=1 \end{cases}$$

$$s^2+2s+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ doble}$$

$$x_h\left(t\right)=\left(A+Bt\right)e^{-t}$$

$$\dot{x}_h\left(t\right)=\left(B-A-Bt\right)e^{-t}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 3=x_h\left(1\right)=\left(A+B\right)e^{-1} \\ 1=\dot{x}_h\left(1\right)=\left(B-A-B\right)e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3e=A+B \\ e=-A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=4e \\ A=-e \end{cases} \Rightarrow x_h\left(t\right)=\left(4t-1\right)e^{1-t}$$

Segundo, hallamos γ, solución de:

$$\begin{cases} \ddot{x}+2\dot{x}+x=0 \\ x\left(1\right)=0 \\ \dot{x}\left(1\right)=1 \end{cases}$$

$$\gamma\left(t\right)=\left(A+Bt\right)e^{-t}$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0=\gamma\left(0\right)=A \\ 1=\dot{\gamma}\left(0\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \gamma\left(t\right)=te^{-t}$$

Tercero, hacemos la integral:

$$x_p\left(t\right)=\int_1^t\left(t-\tau\right)e^{-\left(t-\tau\right)}2\tau d\tau=e^{1-t}+t-2$$

La solución es:

$$x\left(t\right)=x_h\left(t\right)+x_p\left(t\right)=\left(4t-1\right)e^{1-t}+e^{1-t}+t-2$$

Ejemplo 4 (Muelle 1)**.** Tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-kx \\ x\left(0\right)=x_0 \\ \dot{x}\left(0\right)=v_0 \end{cases}$$

Reescribimos:

$$\begin{cases} \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \\ x\left(0\right)=x_0 \\ \dot{x}\left(0\right)=v_0 \end{cases}$$

La ecuación característica es:

$$s^2+\frac{k}{m}=0\Leftrightarrow s=\pm i\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}$$

Solución:

$$x\left(t\right)=Ae^{i\omega t}+\overline{A}e^{-i\omega t}=C\cos\left(\omega t\right)+D\sin\left(\omega t\right)$$

donde $A\in\mathbb{C}$ y $C,D\in\mathbb{R}$. Ahora sólo queda cuadrar las posiciones iniciales:

$$\begin{cases} x_0=x\left(0\right)=C\\ v_0=\dot{x}\left(0\right)=\omega D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C=x_0\\ D=\frac{v_0}{\omega}\end{cases}$$

Luego, la solución es:

$$x\left(t\right)=x_0\cos\left(\omega t\right)+\frac{v_0}{\omega}\sin\left(\omega t\right)$$

Ejemplo 5 (Muelle 2)**.** Imaginemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-kx+F\left(t\right)\\ x\left(0\right)=x_0\\ \dot{x}\left(0\right)=v_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}\\ x\left(0\right)=x_0\\ \dot{x}\left(0\right)=v_0\end{cases}$$

Hallamos la función de Green:

$$\begin{cases} x\left(0\right)=0\\ \dot{x}\left(0\right)=1\end{cases}\longrightarrow\gamma\left(t\right)=\frac{\sin\left(\omega t\right)}{\omega}$$

De esta forma:

$$x_p\left(t\right)=\int_0^t\sin\left[\omega\left(t-\tau\right)\right]\frac{F\left(\tau\right)}{m}d\tau$$

3. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Son de la forma:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots a_{1n}x_n+b_1\left(t\right)\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+b_2\left(t\right)\\ \vdots\\ \dot{x}_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n+b_n\left(t\right)\end{cases}$$

Claro, está, podemos expresar el sistema vectorialmente:

$$X=\left(x_1,\dots,x_n\right)$$

$$\dot{X}=\left(\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n\right)$$

$$\dot{X}=AX+b\left(t\right)$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_3(t) \end{pmatrix}$.

3.1. Obtención de soluciones

- Si $b \equiv 0$, el el sistema es homogéneo.
- Condiciones iniciales:
$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{1,0} \\ x_2(t_0) = x_{2,0} \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{n,0} \end{cases}$$
  es decir:
$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$$

Probemos con la función: $X(t) = e^{st}v$ con $v \neq 0$ (si $v = 0$ tengo $X(t) = 0$, que siempre es solución).

$$\dot{X}(t) = se^{st}v$$

De manera que:

$$AX(t) = A\left(e^{st}v\right) = e^{st}Av$$

$$\dot{X}(t) - AX(t) = se^{st}v - e^{st}Av = e^{st}[sv - Av] = 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$$

Como $e^{st} \neq 0$, $X(t) = e^{st}v$ es solución y sólo si $Av = sv$, es decir v es un vector propio de A con valor propio s.

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$p(s) = \det(s\mathbb{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 - 1 \Leftrightarrow s = 1, -1$$

Cuando $s = 1$:

$$A - 1\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cuando $s = -1$:

$$A-(-1)\,\mathbb{I}_2=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

De esta forma, la solución es:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=Ae^{1t}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}+Be^{(-1)t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Si, además impongo $x(0)=4$ y $y(0)=2$, obtengo:

$$\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\ B=1\end{cases}$$

A y B son las componentes de $X(0)$ en la base propia v_1,v_2. De esta forma:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^{t}-e^{-t}\\ e^{t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

Observación 6. Si la matriz A es diagonalizable (podemos encontrar una base de vectores propios), tomo una base de vectores propios de A $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y expresamos $X(0)$ en dicha base:

$$X(0)=\xi_1 v_1+\xi_2 v_n\ \forall\xi\in\mathbb{C}$$

y entonces la solución de $\dot{X}=AX, X(0)=X_0$ es:

$$X(t)=\xi_1 e^{\lambda_1 t}v_1+\cdots+\xi_n e^{\lambda_n t}v_n$$

donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son los correspondientes valores propios.

Ejemplo 7.

$$\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=y\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\det(s\mathbb{I}_2-A)=\begin{vmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s-1\end{vmatrix}=(s-1)^2\Leftrightarrow s=1\text{ doble}$$

$$A-s\mathbb{I}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

La solución es:

$$X(t)=Ae^{t}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

3.1.1. Obtención de una solución adicional

Consideremos:

$$X(t) = e^{st}(v + tw)$$

$$\dot{X}(t) = se^{st}(v + tw) + e^{st}w$$

$$AX(t) = e^{st}(Av + tAw)$$

$$\dot{X}(t) - AX = e^{st}[sv + stw + w - Av - tAw] = 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$$

La exponencial no puede ser cero, luego:

$$\begin{cases} sw - Aw = 0 \\ sv - Av + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [A - s\mathbb{I}_n]\, w = 0 \\ [A - s\mathbb{I}_n]\, v = w \end{cases}$$

De esta forma:

$$X(t) = e^{st}[v + t(A - s\mathbb{I}_n)\, v]$$

Fijémonos en:

$$(A - s\mathbb{I}_n)^2 v = (A - s\mathbb{I}_n)(A - s\mathbb{I}_n) = (A - s\mathbb{I}_n)\, w = 0$$

Por tanto, la condición que debe cumplir el v es:

$$(A - s\mathbb{I}_n)^2 v = 0$$

lo cual significa que v es un vector propio generalizado.

Volvemos al ejemplo anterior:

$$\underbrace{(A - 1\mathbb{I}_2)^2}_{=0} v = 0$$

Luego, nos vale un v cualquiera. Escogemos $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, obteniendo:

$$X_1(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A - \mathbb{I}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - \mathbb{I}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo dos soluciones, lueog una combinación lineal de ellas también es solución:

$$X(t) = Ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Be^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si imponemos $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$, ya podemos hallar una solución:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$X(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

3.2. Vectores propios generalizados

Definición 2. Sea A una matriz cuadrada de dimensión n (real o compleja). Un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio generalizado si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ y un entero no negativo $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(A - \lambda \mathbb{I}_n)^k v = 0$$

Observación 7.

- Obviamente si $k = 1$, v será un vector propio.
- Si v es un vector propio generalizado asociado a $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces la ecuación $(A - \lambda \mathbb{I}_n)^k v = 0$ tiene al menos una solución no nula. Así det $\left[(A - \lambda \mathbb{I}_n)^k\right] = [\det (A - \lambda \mathbb{I}_n)]^k = 0$; es decir $[p_A(\lambda)]^k = 0 \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$.

Notación:

- $\underbrace{V_A(\lambda)}_{=\ker(A - \lambda \mathbb{I}_n)}$ es el subespacio propio de A asociado al valor propio λ.
- $E_A(\lambda) = \left\{ v \in \mathbb{C}^n | \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } (A - \lambda \mathbb{I}_n)^k v = 0 \right\}$ que es el conjunto de vectores propios generalizados asociados a λ junto con el vector nulo. En particular, si λ no es propio $E_A(\lambda) = \{0\}$. Otro nombre para este conjunto es «componentes primarios de un endomorfismo».

Teorema 4 (Descomposición primaria)**.** *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios distintos de la matriz $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ y sean $m_1, \ldots, m_r$ sus respectivas multiplicidades algebraicas. Es decir, el polinomio característico es:*

$$p(s) = (s - \lambda_1)^{m_1} \cdot (s - \lambda_2)^{m_2} \ldots (s - \lambda_r)^{m_r}$$

Los subespacios propios generalizados de A son iguales a $E_A(\lambda_i) = \ker [(A - \lambda \mathbb{I}_n)^{m_i}]$, son A-invariantes, y su dimensión es $\dim E_A(\lambda_i) = m_i$ y se tiene la descomposición:

$$\mathbb{C}^n = E_A(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_A(\lambda_r)$$

En particular, existen bases de $\mathbb{C}^n$ formadas por vectores propios generalizados.

Proposición 1. *Si λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica m y $v \in E_A(\lambda)$, entonces la función:*

$$X(t) = e^{\lambda t} \underbrace{\left[v + t (A - \lambda \mathbb{I}_n) v + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^{m-1} v \right]}_{:=Z(t)}$$

es solución de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$. Además $X(0) = v$.

Demostración.

$$X(t) = e^{\lambda t} Z(t) \qquad \dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t} Z(t) + e^{\lambda t} \dot{Z}(t)$$

$$\dot{X}(t) - AX = e^{\lambda t} \left[\lambda Z(t) + \dot{Z}(t) - AZ(t) \right]$$

$$\dot{X}(t) - AX = 0 \Leftrightarrow \lambda Z(t) + \dot{Z}(t) - AZ(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{Z}(t) = (A - \lambda \mathbb{I}_n) Z(t)$$

$$\dot{Z}(t) = (A - \lambda \mathbb{I}_n) v + t (A - \lambda \mathbb{I}_n)^2 v + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^3 v + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^{m-1} v$$

Por otra parte:

$$(A - \lambda \mathbb{I}_n) Z(t) = (A - \lambda \mathbb{I}_n) v + t (A - \lambda \mathbb{I}_n)^2 v + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^3 v + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^{m-1} v + \frac{t^{m-1}}{(n-1)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^m v$$

De forma que:

$$\dot{Z}(t) - (A - \lambda \mathbb{I}_n) Z(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^m v = 0$$

Además:

$$X(0) = 1 \left[v + 0 + \cdots + 0 \right] v$$

□

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son valores propios distintos de A, entonces se puede encontrar una base formada por vectores propios generalizados $\{v_1, \ldots v_n\}$. Para cada uno de ellos tengo la solución que indica la proposición anterior.

$$v \in E_A(\lambda) \longrightarrow V(t) = e^{\lambda t} \left[v + t (A - \lambda \mathbb{I}_n) v + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^2 v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^{m-1} v \right]$$

Dadas las condiciones iniciales $X(0) = X_0$, lo descompongo en dicha base:

$$X_0 = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n$$

y así la solución de $\dot{X} = AX, X(0) = X_0$ es:

$$X(t) = \xi_1 V_1(t) + \xi_2 V_2(t) + \ldots \xi_n V_n(t)$$

En el caso $t = 0$:

$$X(0) = \xi_1 V_1(0) + \cdots + \xi_n V_n(0) = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n = X_0$$

Ejercicio 8. $\dot{X} = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución 8.

$$p\left(s\right)=\left(s-2\right)^{3}\left(s-1\right)$$

$$\begin{array}{ll}\lambda_1=2 & m_1=3\\ \lambda_2=1 & m_2=1\end{array}$$

Operamos:

$$\left(A-2\mathbb{I}\right)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(A-2\mathbb{I}\right)^{2}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(A-2\mathbb{I}\right)^{3}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(A-\mathbb{I}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Los vectores propios generalizados que obtenemos son:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad v_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$V_1\left(t\right)=e^{2t}\left[v_1+t\left(A-2\mathbb{I}\right)v_1+\frac{t^2}{2}\left(A-2\mathbb{I}\right)^2v_1\right]=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}e^{2t}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$V_2\left(t\right)=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$V_3\left(t\right)=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=e^{2t}\begin{pmatrix}t+\frac{t^2}{2}\\t\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$V_4(t) = e^t v_4 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución general:

$$X(t) = C_1 V_1(t) + C_2 V_2(t) + C_3 V_3(t) + C_4 V_4(t)$$

Si además queremos que $X(0) = (-1, 1, 0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\xi_1}_{=0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\xi_2}_{=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\xi_3}_{=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\xi_4}_{=-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X_0 = v_2 - v_4$$

$$X(t) = V_2(t) - V_4(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} - e^t \\ e^{2t} \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Proposición 2. *Si $X(t)$ es solución de $\dot{X} = AX$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $Y(t) = X(t - t_0)$ es también una solución.*

Demostración.

$$\dot{Y}(t) = \frac{d}{dt} X(t - t_0) = \dot{X}(t - t_0) \underbrace{\frac{d}{dt}(t - t_0)}_{=1} = \dot{X}(t - t_0)$$

$$\dot{Y}(t) - AY(t) = \dot{X}(t - t_0) - AX(t - t_0) = \left[\dot{X}(t) - AX(t)\right]_{t = t - t_0} = 0$$

En particular, $\overline{V}_i(t) \equiv V_i(t - t_0)$ son soluciones y $\overline{V}_i(t_0) = V_i(t_0 - T_0) = V_i(0) = v_i$ con la misma notación que antes, la solución es de $\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ es:

$$X(t) = \xi_1 V_1(t - t_0) + \xi_2 V_2(t - t_0) + \cdots + \xi_n V_n(t - t_0)$$

donde los ξ_i son los coeficientes de la combinación lineal $X_0 = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n$ $\square$

Observación 8. El grado máximo del polinomio $\left[v + t(A - \lambda \mathbb{I}_n) v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda \mathbb{I}_n)^{m-1} v\right]$ es igual a $\nu - 1$ donde ν es la multiplicidad de la raíz λ del polinomio mínimo de A.

4. Exponencial de una matriz

En el caso de una única ecuación lineal de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{(t-t_0)}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t-t_0)^k a^k x_0$$

En el caso de un sistema:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\dot{X}(t_0) = AX(t_0) + AX_0$$

Ahora:

$$\ddot{X} = A\dot{X}$$

De forma que:

$$\ddot{X}(t_0) = A\dot{X}(t_0) = AAX_0 = A^2X_0$$

De nuevo:

$$\dddot{X} = A\ddot{X}$$

$$\dddot{X}(t_0) = A\ddot{X}(t_0) = AA^2X_0 = A^3X_0$$

Y en general:

$$X^{(k)} = AX^{(k-1)}$$

$$X^{(k)}(t_0) = AX^{(k-1)}(t_0) = AA^{k-1}X_0 = A^kX_0$$

Ahora, podemos plantear la serie de Taylor de la solución:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t-t_0)^k X^{(k)}(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(t-t_0)^k A^k X_0 =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t-t_0)^k A^k\right) X_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((t-t_0)A)^k\right) =$$

$$= e^{(t-t_0)A}X_0$$

Para poder hacer este último paso, debe cumplirse:

1. Asegurarnos de que la serie converge
2. La suma de la suma es un función derivable
3. La suma converge a la solución (analítica)

Ejemplo 8.

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k} & 3+\frac{1}{k} \\ \frac{2}{k} & e^{-k} \end{pmatrix}$$

Llamaremos:

$$\lim A_k := \begin{bmatrix} \lim{(A_k)}_{11} & \dots & \lim{(A_k)}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lim{(A_k)}_{n1} & \dots & \lim{(A_k)}_{nn} \end{bmatrix}$$

En nuestro ejemplo:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3. Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,m)}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, llamamos norma de A al número real:

$$||A|| = \max_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} |A_{ij}|$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:
$||A|| \geq 0$
$||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
$||\lambda A|| = |\lambda|\,||A||\ \ \forall\lambda \in \mathbb{K}$
$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
$|A_{ij}| \leq ||A||\ \ \forall i = 1,\dots,n; \forall j = 1,\dots,m$
Por las propiedades 1 a 4, |||| es una norma en el espacio vectorial de las matrices $n \times m$.

Proposición 3. *Si $A \in \mathbb{K}^{(n,m)}$ y $B \in \mathbb{K}^{(m,p)}$ entonces:*

$$||AB|| \leq m\,||A||\,||B||$$

Demostración.

$$||AB|| = \max_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} \left|{(AB)}_{ij}\right| = \max\left|\sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}\right| \leq \max\sum_{k=1}^{m} |A_{ik}B_{kj}| =$$

$$= \max\sum_{k=1}^{m} |A_{ik}|\,|B_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{m} ||A||\,||B|| = m\,||A||\,||B||$$

$\square$

Proposición 4. *Si $A \in \mathbb{K}^{(n,m)}$ y $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, entonces:*

$$||A^p|| \leq n^p\,||A||^p$$

Demostración. Hagamos inducción:

Para $p = 0$:

$$\left|\left|A^0\right|\right| = ||I_n|| = \max\{0, 1\} = 1$$

$$n^0 \, ||A||^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Supuesto cierto para p: $||A^p|| \leq n^p \, ||A||^p$

$$\left|\left|A^{p+1}\right|\right| = ||A^p A|| \leq n \, ||A^p|| \, ||A|| \overset{\text{inducción}}{\leq} n \cdot n^p \, ||A||^p \, ||A|| =$$

$$= n^{p+1} \, ||A||^{p+1}$$

□

Definición 4. Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ llamamos serie exponencial de A a la serie de matrices $\sum_k \frac{1}{k!} A^k$.

Teorema 5. *Para cualquier matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ la serie exponencial de A es convergente.*

Demostración. Debemos probar que cada serie $\sum_k \frac{1}{k!} \left(A^k\right)_{ij}$ es convergente, para lo cual probaremos que dichas series son absolutamente convergentes, o dicho de otra manera, que $\sum_k \frac{1}{k!} \left|\left(A^k\right)_{ij}\right|$ está acotada.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\left(A^k\right)_{ij}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left|\left|A^k\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k \, ||A||^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(n \, ||A||\right)^k = e^{n||A||}$$

por tanto, la serie es convergente. □

Definición 5. La suma de la serie exponencial de la matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ se llama exponencial de la matriz A, que escribiremos $e^A \left(\in \mathbb{K}^{(n,n)}\right)$.

Ejemplo 9.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Por rellenar.

4.1. Propiedades de la exponencial matricial

Proposición 5. *La exponencial matricial satisface las siguientes propiedades:*

1. $e^{0_n} = \mathbb{I}_n$
2. $e^{\lambda \mathbb{I}_n} = e^{\lambda} \mathbb{I}_n$
3. *Si $AB = BA$, entonces $e^A B = B e^A$.*

4. Si $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$. En general $e^{A+B} \neq \begin{cases} e^A e^B \\ e^B e^A \end{cases}$.

5. La matriz e^A es siempre regular y su inversa es e^{-A}.

6. Si P es una matriz invertible, entonces $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

Demostración.

1.
$$e^{0_n} = \mathbb{I}_n + 0_n + \frac{1}{2}0_n^2 + \frac{1}{k!}0_n^k + \cdots = \mathbb{I}_n$$

2.
$$\begin{aligned} e^{\lambda \mathbb{I}_n} &= \mathbb{I}_n + \lambda \mathbb{I}_n + \frac{1}{2!}\left(\lambda \mathbb{I}_n\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\lambda \mathbb{I}_n\right)^k + \cdots = \\ &= \mathbb{I}_n + \lambda \mathbb{I}_n + \frac{1}{2}\lambda^2 \mathbb{I}_n + \cdots + \frac{1}{k!}\lambda^k \mathbb{I}_n + \cdots = \\ &= \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots\right)\mathbb{I}_n = e^\lambda \mathbb{I}_n \end{aligned}$$

3. Tenemos:
$$Be^A = B\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)$$
$$e^A B = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)B$$

   Ahora si $AB = BA$, probemos por inducción que $A^k B = BA^k$. Para $k = 2$:
$$A^2 B = AAB = BAA = BA^2$$

   Suponiendo cierto $A^k B = BA^k$:
$$A^{k+1}B = AA^k B \overset{\text{inducción}}{=} ABA^k = BAA^k = BA^{k+1}$$

   Producto de series:
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)$$

4. Nos lo creemos.

5.
$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{0_n} = \mathbb{I}_n \Rightarrow \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$$

6.
$$e^{P^{-1}AP} = \mathbb{I}_n + P^{-1}AP + \frac{1}{2}\left(P^{-1}AP\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k + \ldots$$
$$\left(P^{-1}AP\right)^2 = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=\mathbb{I}_n}AP = P^{-1}AAP = P^{-1}A^2P$$
$$\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$$

$$e^{P^{-1}AP} = \underbrace{\mathbb{I}_n}_{=P^{-1}\mathbb{I}_nP} + P^{-1}AP + \frac{1}{2!}P^{-1}A^2P + \dots + \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP + \dots =$$

$$= P^{-1}\left(\mathbb{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots\right)P = P^{-1}e^AP$$

□

Esto nos da un método de cálculo para exponenciales de matrices. Si $A = P^{-1}DP$ donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^A = e^{P^{-1}DP} = P^{-1}e^DP = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P$$

Ejemplo 10.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \mathbb{I}_2 + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.1. Cálculo de la exponencial

Hallaremos e^{tA}. Si se necesita e^A, ponemos $t = 1$. Sea $v \in E_A(\lambda)$ donde m es la multiplicidad algebraica de λ.

$$e^{tA}v = e^{t(\lambda\mathbb{I}_n + (A - \lambda\mathbb{I}_n))}$$

Como la identidad conmuta con cualquier otra matriz:

$$e^{tA}v = e^{t(A-\lambda\mathbb{I}_n)}e^{t\lambda\mathbb{I}_n}v = e^{t(A-\lambda\mathbb{I}_n)}e^{t\lambda}\mathbb{I}_nv = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda\mathbb{I}_n)}v =$$

$$= e^{\lambda t}\left[\mathbb{I}_nv + t(A - \lambda\mathbb{I})v + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^2v + \dots + \frac{t^k}{k!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^kv + \dots\right]$$

Como $(A - \lambda\mathbb{I})^k v = 0 \; \forall k > m$:

$$e^{tA}v = e^{\lambda t}\left[v + t(A - \lambda\mathbb{I}_n)v + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^2v + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^{m-1}v\right] = V(t)$$

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base formada por vectores propios generalizados y hallamos los correspondientes $V_1(t), \dots, V_n(t)$. Ahora, sea $P = [v_1|v_2|\dots|v_n]$, entonces:

$$e^{tA}P = e^{tA}[v_1|v_2|\dots|v_n] = \left[e^{tA}v_1|e^{tA}v_2|\dots|e^{tA}v_n\right] = [V_1(t)|V_2(t), |\dots|V_n(t)]$$

Multiplicando por P^{-1} por la derecha:

$$e^{tA} = e^{tA}PP^{-1} = \left[V_1\left(t\right)\left|V_2\left(t\right),\right|\ldots\left|V_n\left(t\right)\right]P^{-1}$$

Ejemplo 11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 2 & \quad m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & \quad m_1 = 1 \end{matrix}$$

$$E_1\left(1\right) = \left\langle \underbrace{\left(0,-2,1\right)}_{=:v_1}, \underbrace{\left(1,0,0\right)}_{=:v_2} \right\rangle$$

$$E_2\left(2\right) = \left\langle \underbrace{\left(1,1,0\right)}_{=:v_3} \right\rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1\left(t\right) = e^t\left[v_1 + t\left(A-\mathbb{I}\right)v_1\right] = \begin{pmatrix} -te^t \\ -2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$V_2\left(t\right) = e^t\left[v_2 + t\left(A-\mathbb{I}\right)v_2\right] = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3\left(t\right) = e^{2t}v_3 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M\left(t\right) = \left[V_1\left(t\right)\left|V_2\left(t\right)\right|V_3\left(t\right)\right] = \begin{pmatrix} -te^t & e^t & e^{2t} \\ -2e^t & 0 & e^{2t} \\ e^t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = M\left(t\right)P^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t}-e^t & 2e^{2t}-2e^t-te^t \\ 0 & e^{2t} & 2e^{2t}-2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$M\left(0\right) = \left[V_1\left(0\right)\left|V_2\left(0\right)\right|V_3\left(0\right)\right] = P$$

Teorema 6. *Dada $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$ dada por $\varphi\left(t\right) = e^{tA}$ es derivable y su derivada es:*

$$\varphi\left(t\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

Demostración. $e^{tA} = [V_1(t)|\dots|V_n(t)]\,P^{-1}$ por lo que cada elemento de e^{tA} es una combinación lineal de las componentes de las funciones $V_i(t)$. Como las componentes de $V_i(t)$ son polinomios por exponenciales, deducimos que son funciones C^∞. Para hallar la derivada, derivamos columna a columna:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left([V_1(t)|\dots|V_n(t)]\,P^{-1}\right) = \frac{d}{dt}\left([V_1(t)|\dots|V_n(t)]\right)P^{-1} =$$

$$= \left[\dot{V}_1(t)|\dots|\dot{V}_n(t)\right]P^{-1}$$

Recordemos que $\dot{V}_i(t) = AV_i(t)$, luego:

$$[AV_1(t)|\dots|AV_n(t)]\,P^{-1} = A\underbrace{[V_1(t)|\dots|V_n(t)]\,P^{-1}}_{=e^{tA}} = Ae^{tA}$$

□

Demostración alternativa (mediante serie de potencias). Se deriva término a término la serie $\left(e^{tA}\right)_{ij}$ y se comparara con la serie $\left(Ae^{tA}\right)_{ij}$, viendo que sale lo mismo. □

Teorema 7. *Sea $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. La función matricial $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$ dada por $\varphi(t) = e^{tA}$ es la única función matricial que satisface:*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R} \\ \qquad \varphi(0) = \mathbb{I}_n \end{cases}$$

Demostración. $\varphi(t) = e^{tA}$ satisface ambas: $\dot{\varphi}(t) = Ae^{tA}$ (lo acabamos de probar) y $\varphi(0) = e^{0A} = e^{0_n} = \mathbb{I}_n$.

Veamos que es la única: Supongamos una $\varphi(t)$ de forma desconocida que satisface ambas propiedades, definimos:

$$N(t) := e^{-tA}\varphi(t)$$

De manera que:

$$\frac{dN}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-tA}\varphi(t)\right] = (-A)\,e^{-tA}\varphi(t) + e^{-tA}\dot{\varphi}(t) =$$

$$= -Ae^{-tA}\varphi(t) + e^{-tA}A\varphi(t) = -Ae^{-tA}\varphi(t) + Ae^{-tA}\varphi(t) = 0$$

Así, la función $N(t)$ es constante, cuyo valor lo hallamos evaluando en $t = 0$.

$$N(t) = N(0) = e^{-0A}\varphi(0) = \mathbb{I}_n\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n$$

Es decir:

$$e^{-tA}\varphi(t) = \mathbb{I}_n \ \forall t \in \mathbb{R}$$

y multiplicando por la izquierda por e^{tA} obtenemos:

$$\varphi(t) = e^{tA}$$

□

Observación 9. Si $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ tiene valores propios complejos $\lambda = a \pm i\omega$, entonces:

$$e^{tA} = \underbrace{e^{at}\left[\cos(\omega t)\,\mathbb{I}_2 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}(A - a\mathbb{I}_2)\right]}_{=:\varphi(t)}$$

donde lo anterior es la llamada fórmula de Rodríguez.

$$\varphi(0) = e^{a0}\left[\cos(0)\,\mathbb{I}_2 + \frac{\sin(0)}{\omega}(A - a\mathbb{I}_2)\right] = \mathbb{I}_2$$

$$\varphi(t) = ae^{at}\,[] + e^{at}\left[-\omega\sin(\omega t)\,\mathbb{I}_2 + \cos(\omega t)(A - a\mathbb{I})\right] = \cdots = A\varphi(t)$$

Si tenemos una $\varphi(t) = e^{tA}$ tal que $\varphi : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ donde $GL(n, \mathbb{K})$ denota el conjunto de matrices $n \times n$ invertibles.

$$\varphi(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = \varphi(t)\,\varphi(s)$$

Esto constituye un morfismo de grupos.

4.2. Teorema espectral

Teorema 8 (Teorema espectral)**.** *Sea A una matriz cuadrada de dimensión n.*

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios (iguales o distintos) de A, entonces $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ son los valores propios de e^A.

Si $v \in V_A(t)$ entonces $v \in V_{e^A}\left(e^{\lambda}\right)$.

Si $v \in E_A(t)$ entonces $v \in E_{e^A}\left(e^{\lambda}\right)$.

Demostración. Queremos probar lo siguiente:

$$(A - \lambda\mathbb{I}_n)\,v = 0 \Rightarrow \left(e^A - e^{\lambda}\mathbb{I}_n\right)v = 0$$

Ahora, sea $v \in E_A(\lambda)$, entonces $(A - \lambda\mathbb{I}_n)^m\,v = 0$.

$$e^A - e^{\lambda}\mathbb{I}_n = e^{\lambda\mathbb{I}_n + (A - \lambda\mathbb{I}_n)} - e^{\lambda}\mathbb{I}_n = e^{\lambda}e^{A - \lambda\mathbb{I}_n} - e^{\lambda}\mathbb{I}_n =$$

$$= e^{\lambda}\left(e^{A - \lambda\mathbb{I}_n} - \mathbb{I}_n\right)$$

Así:

$$\left(e^A - e^{\lambda\mathbb{I}_n}\right)v = e^{\lambda}\left[e^{A - \lambda\mathbb{I}_n} - \mathbb{I}_n\right]v =$$

$$= e^{\lambda}\left[v + (A - \lambda\mathbb{I}_n)\,v + \frac{1}{2!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^{m-1}\,v + 0 - v\right] =$$

$$= e^{\lambda}\underbrace{\left[\mathbb{I}_n + \frac{1}{2!}(A - \lambda\mathbb{I}_n) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}(A - \lambda\mathbb{I}_n)^{m-2}\right]}_{=:B}(A - \lambda\mathbb{I}_n)\,v$$

con $B \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ y $B(A - \lambda\mathbb{I}_n) = (A - \lambda\mathbb{I}_n)\,B$. Es decir $\left(e^A - e^{\lambda}\mathbb{I}_n\right)v = e^{\lambda}B(A - \lambda\mathbb{I}_n)\,v$. Multiplico por $e^A - e^{\lambda\mathbb{I}_n}$ y obtengo:

$$\left(e^A - e^{\lambda \mathbb{I}_n}\right)^m v = \left[e^{\lambda} B \left(A - \lambda \mathbb{I}_n\right)\right]^m v = e^{m\lambda} B^m \left(A - \lambda \mathbb{I}_n\right)^m v = 0$$

luego $v \in E_{e^A}\left(e^{\lambda}\right)$. Esto prueba 3. Para 2, si $v \in V_A(\lambda)$, $(A - \lambda) v = 0$ y así:

$$\left(e^A - e^{\lambda \mathbb{I}_n}\right) v = e^{\lambda} B \left(A - \lambda \mathbb{I}_n\right) v = 0$$

Para la primera, tomo una base formada por vectores propios generalizados de A $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Hemos visto que cada uno de ellos es propio generalizado de e^A con valor propio e^{λ_i}. Así, obtenemos una base de vectores propios generalizados de e^A con valores propios $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$. Esto prueba 1. $\square$

Observación 10. Nótese que lo anterior no implica que la multiplicidad algebraica de λ como valor propio de A sea igual a la multiplicidad de e^{λ} como valor propio de e^A. La razón es que puede haber dos valores propios distintos $\lambda \neq \mu$ de A tales que $e^{\lambda} = e^{\mu}$.

Ejemplo 12.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(s) = s^2 + \pi^2$$

Las soluciones son $\lambda = i\pi$ y $\mu = -i\pi$. Como podemos ver, sus exponenciales son iguales:

$$e^{\lambda} = e^{i\pi} = -1$$

$$e^{\mu} = e^{-i\pi} = -1$$

La exponencial es:

$$e^A = \mathbb{I}_2$$

que tiene un valor propio $\lambda = -1$, pero que aquí tiene multiplicidad 2.

4.2.1. Normas matriciales

Definición 6. Son aquellas que cumplen:

$$||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$$

Observación 11. Nótese que la que hemos usado nosotros $||A|| = \text{máx} \, |a_{ij}|$ no es submultiplicativa; no es una normal matricial.

5. Sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

5.1. Solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Teorema 9. *El problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$.

Demostración. Veamos que efectivamente es solución:

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{d}{dt}e^{(t-t_0)A}X_0 = \left(\frac{d}{dt}e^{(t-t_0)A}\right)X_0 = Ae^{(t-t_0)A}X_0 = AX(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$X(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}X_0 = e^{0A}X_0 = e^0X_0 = \mathbb{I}X_0 = X_0$$

Ahora, comprobemos que es única. Si $X(t)$ es una solución del problema de valor inicial, definimos:

$$Z(t) := e^{-(t-t_0)A}X(t)$$

y así:

$$\frac{dZ}{dt}(t) = -Ae^{(t-t_0)A}X(t) + e^{-(t-t_0)A}\dot{X}(t)$$

Como $\dot{X}(t) = AX$:

$$\dot{Z}(t) = -Ae^{(t-t_0)A}X(t) + e^{-(t-t_0)A}AX(t)$$

Como e^A y A conmutan:

$$\dot{Z}(t) = -Ae^{(t-t_0)A}X(t) + Ae^{-(t-t_0)A}X(t) = 0$$

Por tanto, $Z(t)$ es una función constante.

$$Z(t) = Z(t_0) = e^{-(t_0-t_0)A}X(t_0) = \mathbb{I}_nX_0$$

y así:

$$X_0 = Z(t) = e^{-(t-t_0)A}X(t)$$

de donde:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$$

□

Ejemplo 13.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = AX$$

$$X(1) = (1,1)$$

Luego:

$$X(t) = e^{(t-1)A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2(t-1)} & e^{2(t-1)} \\ 0 & e^{2(t-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} te^{2(t-1)} \\ e^{2(t-1)} \end{pmatrix}$$

5.1.1. Estructura de la solución general

Llamamos $\mathcal{S}$ al conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$$\mathcal{S} = \left\{ t \longrightarrow e^{(t-t_0)A} X_0 \text{ t.q. } X_0 \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Teorema 10. *El conjunto de soluciones $\mathcal{S}$ de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ de dimensión n. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ la aplicación $ev_{t_0} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dada por $ev_{t_0}(X) = X(t_0)$ es un isomorfismo.*

Demostración. $\mathcal{S}$ es el conjunto de funciones de la forma $e^{tA}\xi$ con $\xi \in \mathbb{K}^n$; es decir, el conjunto imagen de e^{tA}, que es un subespacio vectorial del conjunto de funciones con valores en $\mathbb{K}^n$. Además, cada solución es una función de clase C^∞ (la exponencial lo es). Como e^{tA} es invertible, tiene rango n para cada $t \in \mathbb{R}$, por lo que la dimensión de $\operatorname{Im}\left(e^{tA}\right)$ es n, e igualmente la dimensión de $\mathcal{S}$ es n.

Ahora veamos que ev_{t_0} es un isomorfismo. Primero, veamos que es lineal:

$$ev_{t_0}(X+Y) = (X+Y)(t_0) = X(t_0) + Y(t_0) = ev_{t_0}(X) + ev_{t_0}(Y)$$

$$ev_{t_0}(\lambda X) = (\lambda X)(t_0) = \lambda X(t_0) = \lambda ev_{t_0}(X)$$

Además es inyectiva. Si $X, Y \in \mathcal{S}$ son tales que $ev_{t_0}(X) = ev_{t_0}(Y)$, es decir, $X(t_0) = Y(t_0)$. Entonces, llamando X_0 a $X(t_0) = Y(t_0)$, tengo que X e Y son ambas soluciones de $\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$. Como la solución del problema de valor inicial es única, se deduce que $X = Y$. Como estamos en espacios de la misma dimensión n, ser inyectiva es equivalente a ser biyectiva. Al ser lineal y biyectiva, ev_{t_0} es un isomorfismo. $\square$

Teorema 11. *Sea $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distintos con multiplicidad mínima (índice de nilpotencia) $\nu_1, \ldots, \nu_r$. (Esto significa que el polinomio mínimo es de la forma: $(s-\lambda_1)^{\nu_1} \ldots (s-\lambda_r)^{\nu_r}$ y el polinomio característico es $(s-\lambda_1)^{m_1} \ldots (s-\lambda_r)^{m_r}$ donde $\nu_i \leq m_i$ $\forall i = 1, \ldots, r$). Entonces toda solución de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ es de la forma:*

$$X(t)=\sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} P_j(t)$$

con $P_j(t)$ es un polinomio de grado mejor que ν_j con valores en $E_A(\lambda_j)$. Además, existen soluciones para las que $P_j(t)$ alcanza el grado máximo ν_j-1.

Demostración. Dado un vector $X_0\in\mathbb{K}^n$, descomponemos $X_0=v_1+\cdots+v_n$ con $v_j\in E_A(\lambda_j)$y la solución $X(t)=e^{tA}X_0=e^{tA}v_1+\cdots+e^{tA}v_n$. Así cada sumando es:

$$e^{tA}v_j=V_j(t)=e^{\lambda_j t}\left[v_j+t\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)v_j+\cdots+\frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)^{m_j-1}v_j\right]=$$

$$=e^{\lambda_j t}\left[v_j+t\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)v_j+\cdots+\frac{t^{\nu_j-1}}{(\nu_j-1)!}\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)^{\nu_j-1}v_j\right]$$

ya que $\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)^{\nu_j}v_j=0\ \forall v_j\in E_A(\lambda_j)$. Así, $e^{tA}v_j$ es una exponencial por un polinomio de grado menor que ν_j.

$$v_j\in E_A(\lambda_j)\Rightarrow\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)^k v_j\in E_A(\lambda_j)$$

ya que $E_A(\lambda_j)$ es A-invariante. Además, existe $v_j\in E_A(\lambda_j)$ tal que $\left(A-\lambda_j\mathbb{I}_n\right)^{\nu_j-1}v_j\neq 0$ ya que el polinomio mínimo de A restringido a $E_A(\lambda_j)$ es $(s-\lambda_j)^{\nu_j}$ (hay al menos un vector cuyo polinomio mínimo es $(s-\lambda_j)^{\nu_j}$). $\square$

Teorema 12. *Sea $A\in\mathbb{R}^{(n,n)}$ con valores propios reales $\mu_1,\ldots,\mu_l$ y valores propios complejos $\alpha_1\pm i\beta_1,\ldots,\alpha_s\pm i\beta_s$ (distintos). Entonces cualquier solución real se puede escribir en la forma:*

$$X(t)=\sum_{j=1}^{l}e^{\mu_j t}P_j(t)+\sum_{j=1}^{s}e^{\alpha_j t}\left[Q_j(t)\cos(\beta_j t)+R_j(t)\sin(\beta_j t)\right]$$

donde P_j es un polinomio real de grado menor que ν_j con valores en $E_A(\mu_j)$ y con Q_j y R_j polinomios reales de grado menor que ν_j y $(\alpha_j+i\beta_j)$ con valores en el $\ker\left\{\left[\left(A-\alpha_j\mathbb{I}_n\right)^2+\beta_j^2\mathbb{I}_n\right]^{\nu_j}\right\}$.

Demostración. Con condiciones iniciales reales $X_0\in\mathbb{R}^n$, la solución es $X(t)=e^{tA}X_0$, que es real por serlo e^{tA}. En la suma anterior separamos los términos que corresponden a valores propios reales $\lambda_j=\mu_j$ y complejos $\lambda_j=\alpha_j\pm i\beta_j$.

$$X(t)=\sum_{j=1}^{l}e^{\mu_j t}P_j(t)+\sum_{j=1}^{s}e^{\alpha_j t+i\beta_j t}P_j(t)+\sum_{j=1}^{s}e^{\alpha_j-i\beta_j t}P_j'(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}e^{\mu_j t}P_j(t)+\sum_{j=1}^{s}e^{\alpha_j t}\underbrace{\left[e^{i\beta_j t}P_j(t)+e^{-i\beta_j t}P_j'(t)\right]}_{\text{debe ser real}}$$

Por tanto:

$$e^{i\beta_j t}P_j(t)+e^{-i\beta_j t}P_j'(t)=e^{-i\beta_j t}\overline{P}_j(t)+e^{i\beta_j t}\overline{P}_j'(t)$$

de donde (como las exponenciales son linealmente independientes):

$$\begin{cases}P_j(t)=\overline{P}_j'(t)\\ P_j'(t)=\overline{P}_j(t)\end{cases}\Leftrightarrow P_j'=\overline{P}_j$$

En consecuencia:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{l} e^{\mu_j t} P_j(t) + \sum_{j=1}^{s} e^{\alpha_j t} 2\mathrm{Re}\left(e^{i\beta_j t} P_j(t)\right)$$

Si escribo $e^{i\beta_j t} = \cos(\beta_j t) + i\sin(\beta_j t)$ y $P_j(t) = \frac{1}{2}\left[Q_j(t) - iR_j(t)\right]$. Entonces:

$$2\mathrm{Re}\left(\left[\cos(\beta_j t) + i\sin(\beta_j t)\right]\frac{1}{2}\left[Q_j(t) - iR_j(t)\right]\right) = Q_j(t)\cos(\beta_j t) + R_j(t)\sin(\beta_j t)$$

Sustituyendo:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{l} e^{\mu_j t} P_j(t) + \sum_{j=1}^{s} e^{\alpha_j t}\left[Q_j(t)\cos(\beta_j t) + R_j(t)\sin(\beta_j t)\right]$$

$P_j(t)$ toma valores en $E_A(\mu_j)$ ya que es el mismo que en el teorema anterior.

$$Q_j(t) = \mathrm{Re}(P_j(t)) = \frac{1}{2}\left[P_j(t) + \overline{P}_j(t)\right] \in E_A(\alpha_j + i\beta_j) + E_A(\alpha_j - i\beta_j)$$

$$R_j(t) = -\mathrm{Im}(P_j(t)) = \frac{1}{2}\left[\overline{P}_j(t) - P_j(t)\right] \in E_A(\alpha_j + i\beta_j) + E_A(\alpha_j - i\beta_j)$$

Por tanto, debemos ver $E_A(\alpha_j + i\beta_j) + E_A(\alpha_j - i\beta_j) = \ker\left\{\left[(A-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]^{\nu_j}\right\}$.

$$E_A(\alpha_j + i\beta_j) = \ker(A - (\alpha_j + i\beta_j)\mathbb{I}_n)^{\nu_j} \longrightarrow (s - \alpha_j - i\beta_j)^{\nu_j}$$

$$E_A(\alpha_j - i\beta_j) = \ker(A - (\alpha_j - i\beta_j)\mathbb{I}_n)^{\nu_j} \longrightarrow (s - \alpha_j + i\beta_j)^{\nu_j}$$

y así:

$$\ker\left[(A - \alpha_j\mathbb{I}_n - i\beta_j\mathbb{I}_n)^{\nu_j}\right] + \ker\left[(A - \alpha_j\mathbb{I}_n + i\beta_j\mathbb{I}_n)^{\nu_j}\right] =$$

$$= \ker\left\{\left[(A - \alpha_j\mathbb{I}_n - i\beta_j\mathbb{I}_n)(A - \alpha_j\mathbb{I}_n + i\beta_j\mathbb{I}_n)\right]^{\nu_j}\right\} =$$

$$= \ker\left\{\left[(A - \alpha_j\mathbb{I}_n)^2 - (i\beta_j\mathbb{I}_n)^2\right]^{\nu_j}\right\} = \ker\left\{\left[(A - \alpha_j\mathbb{I}_n)^2 + \beta_j^2\mathbb{I}_n\right]^{\nu_j}\right\}$$

□

5.2. Solución del sistema no homogéneo

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Teorema 13. *El problema de valor inicial anterior tiene una única solución que viene dada por:*

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau$$

Demostración. Sea $Z(t) = e^{-(t-t_0)A}X(t)$, es decir $X(t) = e^{(t-t_0)A}Z(t)$.

$$\dot{X}(t) - AX(t) - b(t) = e^{(t-t_0)A}AZ(t) + e^{(t-t_0)A}\dot{Z}(t) - Ae^{(t-t_0)}Z(t) - b(t) =$$

$$= e^{(t-t_0)A}\dot{Z}(t) - b(t)$$

Así X es solución de la ecuación diferencial si y solo si $e^{(t-t_0)A}\dot{Z}(t) = b(t)$. Tengo:

$$\dot{Z}(t) = e^{-(t-t_0)A}b(t)$$

e integrando:

$$Z(t) - Z(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{Z}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)A}b(\tau)\, d\tau$$

$$Z(t_0) = e^{-(t_0-t_0)A}X(t_0) = X(t_0) = X_0$$

$$Z(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)A}b(\tau)\, d\tau$$

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}Z(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{(t-t_0)A}\int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)A}b(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-t_0)A-(\tau-t_0)A}b(\tau)\, d\tau = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}b(\tau)\, d\tau$$

$\square$

Ejemplo 14.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(1)\\ y(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$e^{t\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}} = e^{2t\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$X_h(t) = e^{(t-1)A}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = e^{2(t-1)}\begin{pmatrix}1 & t-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = e^{2(t-1)}\begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \int_1^t e^{2(t-\tau)}\begin{pmatrix}1 & t-\tau\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ 0\end{pmatrix} d\tau = \int_1^t e^{2(t-\tau)}\begin{pmatrix}\tau\\ 0\end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix}\int_1^t e^{2(t-\tau)}\tau d\tau\\ \int_1^t 0 d\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}e^{2(t-1)} - \frac{2t+1}{4}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix}e^{2(t-1)}\left(t + \frac{3}{4}\right) - \frac{2t+1}{4}\\ e^{2(t-1)}\end{pmatrix}$$

Observación 12.
$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau$$

A esta fórmula se le llama fórmula de Duhamel o de variación de las constantes, porque anteriormente se sustituía la constante X_0 por una función $Z(t)$.

5.2.1. Estructura de la solución general

$$\dot{X} = AX + b(t)$$

El conjunto de soluciones de dicha ecuación es un subespacio afín de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

- La diferencia de dos soluciones es una solución del sistema homogéneo.
- Una solución del homogéneo más una solución del sistema no homogéneo es una solución del sistema no homogéneo.

En general no se puede decir nada de la forma funcional de la solución puesto que depende de la forma funcional de $b(t)$.

5.3. Ecuaciones de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t)$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

donde los superíndices no indican potenciales, sino «derivadas».

Siendo I un intervalo $f(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable hasta orden n. Dada una solución $y(t)$ defino:

$$X(t) = \left(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, y^{(n-2)}(t), y^{(n-1)}(t) \right)$$

Hallemos $\dot{X}(t)$:

$$\dot{X}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ f(t) - a_0 y(t) - a_1 \dot{y}(t) - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}}_{=X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}}_{=b(t)}$$

Así $X(t)$ es solución del sistema lineal $X = AX + b(t)$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = f(t)\, e_n$$

Recíprocamente, sea $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ una solución del sistema $\dot{X} = AX + b(t)$ con A y $b(t)$ las anteriores:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Obteniendo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + f(t) \end{cases}$$

Llamo $y(t) = x_1(t)$. Entonces:

$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y} \\ x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y} \\ x_4 = \dot{x}_3 = \dddot{y} \\ \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} \\ \dot{x}_n = -a_0 y - a_1 \dot{y} - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)} + f(t) = y^{(n)} \end{cases}$$

Ahora pasando en la última ecuación todo a un lado, obtenemos:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t)$$

Por tanto, dada una solución X del sistema, la primera componente $y(t) = x_1(t)$ es una solución de la ecuación de orden n.

$$\begin{matrix} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \end{matrix} \; \begin{matrix} \xrightarrow{X=\left(y,\dot{y},\ldots,y^{(n-1)}\right)} \\ \xleftarrow[y(t)=x_1(t)=\langle e_1,X(t)\rangle]{} \end{matrix} \; \begin{matrix} \dot{X} = AX + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{matrix}$$

Teorema 14. *El problema de valor de valor inicial*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

tiene solución única.

Demostración. La única solución es la primera componente de la única solución del sistema asociado. □

5.3.1. Solución de la ecuación homogénea

Valores propios de A, polinomio característico:

A es la matriz compañera del polinomio $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ por lo que el polinomio característico de A es $p(s)$. Además, el polinomio mínimo de A es igual al característico; de forma que la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio mínimo es igual a la multiplicidad algebraica de λ_i, e igual a la multiplicidad de λ_i como raíz de $p(s)$.

Teorema 15. *La solución general de la ecuación diferencial homogénea:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$$

es:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} p_i(t)$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son las raíces (distintas) del polinomio característico:

$$p(s) = s^n - a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

y $p_i(t)$ es un polinomio (complejo) arbitrario de grado menor que m_i (la multiplicidad de la raíz λ_i). Si la ecuación es real y las raíces reales son $\mu_1, \ldots, \mu_s$ y las complejas son $\alpha_l \pm i\beta_l$ entonces la solución general (real) es:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{\mu_i t} p_i(t) + \sum_{j=1}^{l} e^{\alpha_j t} \left[q_j(t)\cos(\beta_j t) + r_j(t)\sin(\beta_j t)\right]$$

con grado de p_i, q_i, r_i menor que la multiplicidad de la raíz correspondiente.

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de la forma indicada $\left(\sum e^{\lambda_i t} p_i(t)\right)$. Veamos que son iguales.

Si $y \in \mathcal{S}$, es decir, si $y(t)$ es solución, entonces $X(t) = \left(y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$ es solución de $\dot{X} = AX$, es decir, es de la forma $X(t) = \sum e^{\lambda_i t} P_i(t)$. Así y es la primera componente, que será de la misma forma $\sum e^{\lambda_i t} p_i(t)$ con $p_i = \langle e_1, P_i \rangle$, es decir, $y \in \mathcal{F}$. Así $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$.

Para ver que $\mathcal{S} = \mathcal{F}$, como son espacios vectoriales, veamos que tiene la misma dimensión. Por un lado $\dim \mathcal{S} = n$, ya que el conjunto de soluciones del sistema asociado tiene dimensión n. Un sistema generador de $\mathcal{F}$ es $\left\{t^k e^{\lambda_i t} | i = 1, \ldots, r; k = 0, \ldots, m_i - 1\right\}$ y, además, son un sistema linealmente independiente. Por tanto, es una base y:

$$\dim \mathcal{F} = \text{número de elementos de} \left\{t^k e^{\lambda_i t} | i = 1, \ldots, r; k = 0, \ldots, m_i - 1\right\} = \sum_{i=1}^{r} m_i = n$$

$\square$

Ejemplo 15. $\begin{cases} \dddot{y} - 2\ddot{y} - 4\dot{y} + 8y = 0 \\ y(0) = 4 \\ \dot{y}(0) = 8 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$p(s) = s^3 - 2s^2 - 4s + 8 = (s-2)^2 (s+2)$$

$$\begin{array}{ll} \lambda = 2 & m = 2 \\ \lambda = -2 & m = 1 \end{array}$$

Solución general:

$$y(t) = e^{2t}(A + Bt) + e^{-2t} C$$

Ajustamos las constantes:

$$\dot{y}(t) = 2(A + Bt) e^{2t} + Be^{2t} - 2e^{-2t}$$

$$\ddot{y}(t) = 2Be^{2t} + 4(A + B) e^{2t} + 2Be^{2t} + 4Ce^{-2t}$$

$$\begin{cases} 4 = y(0) = A + C \\ 8 = \dot{y}(0) = 2A + B - 2C \\ 0 = \ddot{y}(0) = 4A + 4B + 4C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -4 \\ C = -1 \end{cases}$$

La solución del problema de valor inicial es:

$$y(t) = (5 - 4t) e^{2t} - e^{-2t}$$

Ejemplo 16. $y^{(4)} - y = 0$

$$p(s)\, p = s^4 - 1 = \left(s^2 + 1\right)\left(s^2 - 1\right) = (s + i)(s - i)(s + 1)(s - 1)$$

$$y(t) = Ae^{it} + Be^{-it} + Ce^{t} + De^{-t}$$

Como la solución es real, debe ser:

$$y(t) = \overline{y}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ae^{it} + Be^{-it} + Ce^{t} + De^{-t} = \overline{A}e^{-it} + \overline{B}e^{it} + Ce^{t} + De^{-t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 2\mathrm{Re}\left(Ae^{it}\right) + Ce^{t} + D^{-t} = E\cos t + F\sin t + Ce^{t} + De^{-t}$$

O bien, podemos usar la segunda parte del teorema:

$$Ae^{t} + Be^{-t} + C\cos t + D\sin t$$

5.3.2. Solución de la ecuación completa

La solución del sistema equivalente es:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

donde $X_h(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ y $\int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)}b(\tau)\,d\tau$. La primera componente es la solución de la ecuación de orden n.

$$y(t) = \langle e_1, X(t)\rangle = \langle e_1, X_h(t)\rangle + \langle e_1, X_p(t)\rangle$$

donde $\langle e_1, X_h(t)\rangle = y_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea con las condiciones iniciales dadas (ya sabemos hallarla) y $X_p(t)$ es la solución de la no homogénea con condiciones iniciales nulas.

$$y_p(t) = \langle e_1, X_p(t)\rangle = \left\langle e_1, \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}b(\tau)\,d\tau\right\rangle = \int_{t_0}^{t}\left\langle e_1, e^{(t-\tau)A}b(\tau)\right\rangle d\tau = \int_{t_0}^{t}\underbrace{\left\langle e_1, e^{(t-\tau)A}e_n\right\rangle}_{=:\gamma(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$$

Donde hemos definido $\gamma(t) = \left\langle e_1, e^{tA}e_n\right\rangle$, que se llama función de Green para el problema de Cauchy. Veamos cómo obtener $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \left\langle e_1, e^{tA}e_n\right\rangle$$

Recordando $X(t) = e^{tA}X_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$, podemos ver que $e^{tA}e_n$ es la solución del sistema homogéneo con condición inicial $X(0) = e_n$. Es decir, $\left\langle e_1, e^{tA}e_n\right\rangle$ será la solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales:

$$\left(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\right) = (0,, 0, \ldots, 0, 1)$$

En definitiva, la función de Green es la solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \ldots, y^{(n-2)} = 0, y^{(n-1)}(0) = 1$.

Ejemplo 17. $\begin{cases} \dddot{y} - 2\ddot{y} - 4\dot{y} + 8y = t \\ y(0) = 4 \\ \dot{y}(0) = 8 \\ \ddot{y}(0) = 0 \end{cases}$

$$p(s) = s^3 - 2s^2 - 4s + 8 = (s+2)(s-2)^2$$

$$y_h(t) = (A + Bt)e^{2t} + Ce^{-2t}$$

$$y(0) = A + C$$

$$\dot{y}(0) = 2A + B - 2C$$

$$\ddot{y}(0) = 4A + 4B + 4C$$

Obtenemos los valores: $A = 5$, $B = -4$, $C = -1$; de manera que:

$$y_h(t) = (5 - 4t)\, e^{2t} - e^{-2t}$$

Ahora, hallamos $\gamma(t)$ resolviendo la homogénea con las condiciones iniciales $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0)$.

$$\gamma(t) = (A + B)\, e^{2t} + C^{-2t}$$

$$\gamma(0) = A + C$$

$$\gamma(0) = 2A + B - 2C$$

$$\ddot{\gamma}(0) = 4A + 4B + 4C$$

En este caso, obtendríamos los valores: $A = -\frac{1}{16}$, $B = \frac{1}{4}$ y $C = \frac{1}{16}$. De forma que:

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}\right) e^{2t} + \frac{1}{16}e^{-2t}$$

$$y_p(t) = \int_0^t \gamma(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left[\left(\frac{1}{4}(t-\tau) - \frac{1}{16}\right) e^{2(t-\tau)} + \frac{1}{16}e^{-2(t-\tau)}\right] \tau d\tau =$$

$$= \frac{1}{64}\left[(4t - 5)\, e^{2t} + e^{-2t} + (8t + 4)\right]$$

De manera que:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{315}{64}e^{2t} - \frac{63}{16}te^{2t} - \frac{63}{64}e^{-2t} + \frac{2t+1}{16}$$

5.4. Sistemas de orden superior

Ejemplo 18. $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + 3\ddot{y} + y + g(t) \\ \dddot{y} = x + 4\dot{x} + 3\ddot{y} + h(t) \end{cases}$

Convertimos el problema anterior a un sistema de primer orden con las variables:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{y} \\ x_5 = \ddot{y} \end{cases}$$

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} + 3\ddot{y} + y + g(t) \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ x + 4\dot{x} + 3\ddot{y} + h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + 3x_5 + x_3 + g(t) \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_5 + h(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \\ 0 \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau$$

5.5. Método de los coeficientes indeterminados

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t)$$

$$y_p(t) = y_h(t) + \int_{t_0}^{t} \gamma(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Cuando $f(t)$ es de la forma $f(t) = e^{\mu t} R(t)$ se puede hallar una solución y_{nh} de la ecuación no homogénea sin tener que calcular la integral. Este método sirve para funciones de tipo:

- constantes $f(t) = c$
- polinomios $f(t) = R(t)$, siendo $\mu = 0$
- exponenciales $R = \text{cte} =: C$, $f(t) = Ce^{\mu t}$
- y combinaciones de las anteriores como $f(t) = e^{at} \sin(bt)$, $f(t) = e^{at} \cos(bt)$ o $f(t) = p(t) e^{at} \cos(bt) + g(t) e^{at} \sin(bt)$

$$f(t) = R(t) e^{\mu t} \quad \mu \in \mathbb{C}$$

donde $R(t)$ es un polinomio de grado r. De manera que encontramos:

$$y_{nh}(t) = t^m \overline{R}(t) e^{\mu t}$$

donde m es la multiplicidad de μ como raíz del polinomio característico ($m = 0$ si μ no es raíz).

En particular si:

$$f(t) = R(t) e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \frac{1}{2} R(t) e^{(\alpha + i\beta)t} + \frac{1}{2} R(t) e^{(\alpha - i\beta)t}$$

$$f(t) = R(t) e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \frac{1}{2} R(t) e^{(\alpha + i\beta)t} - \frac{1}{2} R(t) e^{(\alpha - i\beta)t}$$

obtenemos:

$$y_{nh}(t) = t^m R_1(t) e^{(\alpha + i\beta)t} + t^m R_2(t) e^{(\alpha - i\beta)t}$$

donde m es la multiplicidad de $\alpha + i\beta$ que es la misma de $\alpha - i\beta$. De forma que, alternativamente, puedo expresar la solución como:

$$y_{nh}(t) = t^m e^{\alpha t} \left[R_3(t) \cos(\beta t) + R_4(t) \sin(\beta t) \right]$$

Ejemplo 19. $\ddot{y} - y = te^{2t}$

$$y_{nh}(t) = t^m (A + Bt) e^{2t}$$

$$p(s) = s^2 - 1$$

Seguimos: $p(\mu) = p(2) = 3 \neq 0 \Rightarrow m = 0$
De forma que:

$$y_{nh}(t) = (A + Bt) e^{2t}$$

Ahora, hallamos los valores de A y B:

$$\dot{y} = (B + 2A + 2Bt) e^{2t}$$

$$\ddot{y} = (4B + 4A + 4Bt) e^{2t}$$

$$\ddot{y} - \dot{y} = (4B + 3A + 3Bt) e^{2t} = te^{2t} \Leftrightarrow \begin{cases} 4B + 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{4}{9} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

En consecuencia:

$$y_{nh} = \left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}t\right) e^{2t}$$

De esta forma, la solución general sería de la forma:

$$y(t) = Ae^t + Be^{-t} + \left(\frac{t}{3} - \frac{4}{9}\right) e^{2t}$$

Ejemplo 20. $\dddot{y} - y = e^t$
En este caso $R(t) = 1$ y $\mu = 1$.

$$y_{nh}(t) = t^m Ae^t$$

$$p(s) = s^3 - 1$$

$$p'(s) = 3s^2$$

$$\begin{cases} p(\mu) = p(1) = 1 - 1 = 0 \\ p'(\mu) = p'(1) = 3 \neq 0 \end{cases}$$

De forma que μ es una raíz simple.

$$\dddot{y} - y = (3A + At) e^t - Ate^t = 3Ae^t = e^t \Leftrightarrow 3A = 1$$

En consecuencia:

$$y_{nh} = \frac{1}{3}te^t$$

Ejemplo 21. $\dddot{y} - y = 2t + 1 + 3e^t = (2t+1) + \left(3e^t\right)$

Como $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ y $L[\lambda y] = \lambda L[y]$. En consecuencia:

$$\begin{array}{rl} \dddot{y} - y = 2t + 1 & y_{nh,1}(t) \\ \dddot{y} - y = 3e^t & y_{nh,2}(t) \end{array} \rightarrow y_{nh}(t) = y_{nh,1}(t) + y_{nh,2}(t)$$

$$p(s) = s^3 - 1$$

Como en el caso 1, es $\mu = 0$:

$$y_{nh,1}(t) = (A + Bt)$$

Obtenemos $A = -1$ y $B = -2$. En consecuencia:

$$y_{nh,1}(t) = -2t - 1$$

En el segundo caso como es $m = 1$, obtenemos:

$$y_{nh,2}(t) = tAe^t$$

Obtenemos $A = 1$. En consecuencia:

$$y_{nh,2}(t) = te^t$$

Por tanto, la solución buscada es:

$$y_{nh}(t) = te^t - 2t - 1$$

Ejemplo 22. $\ddot{y} + y = t \sin(2t)$

En este caso son $\alpha = 0$, $\beta = 2$ y $\mu = 2i$.

$$y_{nh}(t) = t^m e^{0t} \left[(A + Bt)\cos(2t) + (C + Dt)\sin(2t)\right]$$

$$p(s) = s^2 + 1$$

$$p(\mu) = p(2i) = -4 + 1 = -3 \neq 0$$

Por tanto, la solución es de la forma:

$$y_{nh}(t) = (A + Bt)\cos(2t) + (C + Dt)\sin(2t)$$

Ejemplo 23. $\ddot{y} + y = \cos t$

En este caso son $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\mu = 1$

$$y_{nh}(t) = t^m \left[A \cos t + B \sin t\right]$$

$$p(s) = s^2 + 1$$

$$p(s) = 2s$$

$$p(\mu) = p(i) = -1 + 1 = 0$$

$$p'(\mu) = p'(1) = 2i \neq 0$$

En consecuencia $m = 1$. De forma que:

$$y_{nh}(t) = t\left[A \cos t + B \sin t\right]$$

Ejemplo 24. $\begin{cases} \dddot{y} - 2\ddot{y} - 4\dot{y} + 8y = t \\ y(0) = 4 \\ \dot{y}(0) = 8 \\ \ddot{y}(0) = 0 \end{cases}$

$$p(s) = s^3 - 2s^2 - 4s + 8 = (s-2)^2(s+2)$$

$$y_h(t) = (A + Bt)e^{2t} + Ce^{-2t}$$

$$y_{nh}(t) = t^m(E + Ft)$$

siendo $\mu = 0$, y como $p(0) = 8$, $m = 0$. En consecuencia:

$$y_{nh}(t) = E + Ft$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$-4F + 8(E + Ft) = t \Leftrightarrow \begin{cases} E = \frac{1}{16} \\ F = \frac{1}{8} \end{cases}$$

De forma que la solución general es:

$$y(t) = (A + Bt)e^{2t} + Ce^{-2t} + \frac{1}{16}(1 + 2t)$$

Ahora, ajustamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} 4 = y(0) = A + C + \frac{1}{16} \\ 8 = \dot{y}(0) = 2A + B - 2C + \frac{1}{8} \\ 0 = \ddot{y}(0) = 4A + 4B + 4C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{315}{64} \\ B = -\frac{63}{16} \\ C = -\frac{63}{64} \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$y(t) = \left(\frac{315}{64} - \frac{63}{16}t\right)e^{2t} - \frac{63}{64}e^{-2t} + \frac{1}{16}(1 + 2t)$$

6. Transformada de Laplace

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ \text{Ecuación diferencial} & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & \text{Ecuación algebraica lineal} \\ \text{(lineal con coeficientes constantes)} & & \end{array}$$

6.1. Definición y primeras propiedades

Consideramos funciones $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definición 7. Dada $f : [0, \infty)$ llamamos transformada de Laplace de f a la función:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

El dominio de F es el campo de convergencia de la integral paramétrica impropia que la define.

Ejemplo 25. $f(t) = 1$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \int_0^\infty e^{-st} dt \overset{s\neq 0}{=} -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s}$$

Entonces:

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{si} \quad s > 0 \\ \text{diverge} & \text{si} \quad s < 0 \\ \int_0^\infty e^{-st} dt = \int_0^\infty 1 dt = \infty & \text{si} \quad s = 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{array}{rccc} F: & (0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longrightarrow & \frac{1}{s} \end{array}$$

Ejercicio 9. Hallar la transformada de $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{C}$.

Solución. $F(s) = \frac{1}{s-a}$

Proposición 6. *Si la integral que define la transformada de Laplace de f converge absolutamente para $s = s_0$, entonces converge absolutamente para todo $s > s_0$.*

Demostración. Sabemos que:

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} |f(t)|\, dt$$

converge. Ahora, nos preguntamos:

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt$$

¿converge para $s > s_0$?
Como $t > 0$, debe ser:

$$st > s_0 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(t)|\, e^{-st} < e^{-s_0 t} |f(t)|$$

Integrando a ambos lados:

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st} dt < \int_0^\infty e^{-s_0 t} |f(t)|\, dt < \infty$$

Por tanto, es absolutamente convergente $\forall s > s_0$. □

Definición 8. Una función de $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es de orden exponencial si existen $\gamma \in \mathbb{R}$ y K, T tales que:

$$|f(t)| \leq Ke^{\gamma t} \; \forall t \geq T$$

Observación 13. De la definición se tiene que una función de orden exponencial, tiene transformada absolutamente convergente para $s > \gamma$. En lo que se sigue supondremos que f es de orden exponencial y continua a trozos con discontinuidades de salto finito y cuyo conjunto de puntos de discontinuidad no tengan puntos de acumulación finitos.

6.2. Cálculo de la transformada

Proposición 7. *La transformación de Laplace es lineal:*

$$\mathcal{L}(f_1 + f_2) = \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2)$$
$$\mathcal{L}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}(f)$$

Demostración.

$$\mathcal{L}(f_1 + f_2)(s) = \int_0^\infty e^{-st}(f_1(t) + f_2(t))\,dt = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt =$$

$$= \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2)$$
$$\mathcal{L}(\lambda f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\lambda f(t)\,dt = \lambda \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lambda \mathcal{L}(f)(s)$$

□

Ejemplo 26. $f(t) = \cosh(at) = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(e^{at}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-at}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Recordatorio:

$$\int_0^\infty e^{-st}(h(t) + ig(t)) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\,dt + i\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st}(h(t) - ig(t)) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\,dt - i\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

Así:

Proposición 8.

$$\mathcal{L}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathcal{L}(f)}$$

$$Re(\mathcal{L}(f)) = \mathcal{L}(Re(f))$$

$$Im(\mathcal{L}(f)) = \mathcal{L}(Im(f))$$

Demostración. Es obvio a partir del recordatorio anterior. □

Ejemplo 27. $f(t) = \cos(\omega t)$

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Ejemplo 28. $f(t) = \sin(\omega t)$

$$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Ejercicio 10. $\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \frac{1}{s^{n+1}}$. (Inducción sobre n)

Ejemplo 29. $\mathcal{L}\left(1 + t^5 - 3t^7\right)$

$$\mathcal{L}\left(1 + t^5 - 3t^7\right) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}\left(t^5\right) - 3\mathcal{L}\left(t^7\right) = \frac{1}{s} + \frac{5!}{s^6} - 3\frac{7!}{s^8}$$

6.2.1. Reglas de transformación

Definición 9. Llamamos producto de convolución de dos funciones f y g a:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

El producto de convolución cumple que es asociativo y conmutativo:

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Nótese que no hay elemento neutro. En particular:

$$f * 1 \neq f$$

pues:

$$f * 1 = \int_0^t f(t - \tau)\, 1 d\tau$$

Proposición 9 (Reglas de transformación)**.**

1.
$$\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right) = \mathcal{L}(f)(s - a)$$

2. Desplazamiento:
$$\mathcal{L}\left[f(t - a)\, H(t - a)\right] = e^{-as} F(s) \;\; \forall a > 0$$

donde $H(t) := \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$. *12/11/2018 Dibujo 1*

3. *Derivada:*

$$\mathcal{L}\left(\dot{f}\,(t)\right) = sF\,(s) - f\,(0)$$

4. *Integral:*

$$\int_0^t f\,(\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F\,(s)}{s}$$

5. *Multiplicación por t:*

$$tf\,(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -F'\,(s)$$

6. *División por t:*

$$\frac{f\,(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty F\,(\sigma)\,d\sigma$$

7. *Función periódica de periodo T: $f\,(t+T) = f\,(t)\;\; \forall t \in \mathbb{R}$.*

$$f\,(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f\,(t)\,dt$$

8. *Producto de convolución:*

$$f\,(t) * g\,(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F\,(s)\,G\,(s)$$

Demostración.

1.

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{at} f\,(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f\,(t) = F\,(s-a)$$

2.

$$\int_0^\infty e^{-st} f\,(t-a)\,H\,(t-a)\,dt = \int_0^a e^{-st} f\,(t-a)\,\underbrace{H\,(t-a)}_{=0}\,dt + \int_a^\infty e^{-st} f\,(t-a)\,\underbrace{H\,(t-a)}_{=1}\,dt =$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f\,(t-a)\,dt$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $\tau = t - a \Rightarrow d\tau = dt$, llegamos a:

$$\int_0^\infty e^{-st} f\,(t-a)\,H\,(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f\,(\tau)\,d\tau = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f\,(\tau)\,d\tau = e^{-sa} F\,(s)$$

3.

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{=u}\,\underbrace{\dot{f}\,(t)\,dt}_{=dv}$$

Haciendo partes $u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}$ y $dv = \dot{f}\,(t)\,dt$:

$$= \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{=u}\,\underbrace{\dot{f}\,(t)\,dt}_{=dv} = \left[e^{-st} f\,(t)\right]_0^\infty - \int -se^{-st} f\,(t)\,dt =$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-st} f\,(t)}_{=0} - f\,(0) + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f\,(t)\,dt}_{F(s)} = -f\,(0) + sF\,(s)$$

Todo el resto de apartados, salvo el octavo se dejan como ejercicio. □

Ejemplo 30. $\mathcal{L}\left(e^{at}\sin(\omega t)\right)$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\sin(\omega t)\right) = \mathcal{L}(\sin(\omega t))(s-a) = \left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]_{s\to s-a} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

Ejemplo 31. $\begin{cases} \dot{y} = 2y \\ y(0) = 5 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(\dot{y}) = \mathcal{L}(2y) \Leftrightarrow sY(s) - y(0) = 2Y(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sY(s) - 5 = 2Y(s) \Leftrightarrow \mathcal{L}(y) = Y(s) = \frac{5}{s-2} = 5\mathcal{L}\left(e^{2t}\right) = \mathcal{L}\left(5e^{2t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\left(y(t) - 5e^{2t}\right) = 0$$

Por el teorema siguiente, lo anterior es equivalente a:

$$y(t) = 5e^{2t}$$

Teorema 16 (Teorema (de Lerch))**.** *La única función continua $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ cuya transformada de Laplace es nula, es la función nula.*

$$\mathcal{L}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Demostración. La demostración es complicada. □

Ejemplo 32. $\begin{cases} \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = t \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(\ddot{y}) + 3\mathcal{L}(\dot{y}) + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) - s - 0 - 3 = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2+3s+2\right)Y(s) = \frac{1}{s^2} + (s+3) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{1}{2}s^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s+1} - \frac{5}{4}\frac{1}{s+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(t) - \frac{3}{4}\mathcal{L}(t) + 3\mathcal{L}\left(e^{-t}\right) + \frac{5}{4}\mathcal{L}\left(e^{-2t}\right) = \mathcal{L}\left(\underbrace{\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + 3e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-2t}}_{=y(t)}\right)$$

6.2.2. Transformada inversa

Dada una función racional propia $\frac{R(s)}{P(s)}$ con grado$R(s) <$ grado$P(s)$ factorizo $P(s) = a(s-\lambda_1)^{-m_1} \ldots (s-\lambda_r)^{m_r}$:

$$\frac{R(s)}{P(s)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(s-\lambda_i)^j}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{P(s)}\right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{j!} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{j!}{(s-\lambda_j)^j}\right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{j!} e^{\lambda_i t} t^{j-1}$$

Ejemplo 33. Hallar la transformada inversa de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5}$

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+2^2} = \left[\frac{s+1}{s^2+2^2}\right]_{s\to s+1}$$

Por otra parte:

$$\frac{s+1}{s^2+2^2} = \frac{1}{s^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2} = \mathcal{L}[\cos 2t] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin 2t]$$

En consecuencia:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t}\left[\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]$$

Ejemplo 34. Hallar la transformada inversa de $F(s) = \frac{4e^{-7s}}{s^2-6s+13}$

$$F(s) = \frac{4e^{-7s}}{s^2-6s+13}$$

Vamos a usar $f(t-a)H(t-a) \xrightarrow[a>0]{\mathcal{L}} e^{-as}F(s)$. Por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4e^{-7s}}{s^2-6s+13}\right) = H(t-7)\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2-6s+13}\right)\right]_{t\to t-7}$$

Por otra parte:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2-6s+13}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s-3)^2+2^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left[\frac{4}{s^2+2^2}\right]_{s\to s-3}\right) =$$

$$= e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+2^2}\right) = 2e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) = 2e^{3t}\sin 2t$$

En consecuencia:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = 2H(t-7)\,e^{3(t-7)}\sin(2(t-7))$$

6.2.3. Sistemas de ecuaciones

Ejemplo 35. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y + 10 \\ \dot{y} = x - y \\ x(0) = 4 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Transformamos la ecuación mediante la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} sX - 4 = -X - 4Y + \frac{10}{s} \\ sY - 3 = X - Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)X + 4Y = 4 + \frac{10}{s} \\ (s+1)Y - X = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{4s^2+2s+10}{s(s^2+2s+5)} \\ Y = \frac{3s^2+7s+10}{s(s^2+2s+5)} \end{cases}$$

Ahora, toca descomponer en fracciones simples:

$$\begin{cases} X = 2\frac{1}{s} + 2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - 2\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \\ Y = 2\frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)+2^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} x(t) = 2 + 2e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t) \\ y(t) = 2 + e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t) \end{cases}$$

Ejemplo 36. $\begin{cases} \ddot{x} + 2y = 0 \\ \dot{x} + \dot{y} = \cos t \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$

Transformamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} s^2X - s\cdot 0 - 2 + 2Y = 0 \\ sX - 0 + sY - 0 = \frac{s}{s^2+\omega^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{s^2+1} \\ Y = \frac{1}{s^2+1} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} x(t) = 2\sin t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

6.3. Transformada de un sistema

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + b(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{L}(X) - \underbrace{X(0)}_{=X_0} = A\mathcal{L}(X) + \mathcal{L}(b(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s\mathbb{I} - A)\mathcal{L}(X) = X_0 + \mathcal{L}(b(t)) \Leftrightarrow \mathcal{L}(X) = (s\mathbb{I} - A)^{-1} X_0 + (s\mathbb{I} - A)^{-1}\mathcal{L}(b(t))$$

Nótese la similitud de ese término con:

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau$$

De lo anterior obtenemos:

$$\mathcal{L}\left(e^{tA}\right) = (s\mathbb{I} - A)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbb{I} - A)^{-1}\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau\right) = (s\mathbb{I} - A)^{-1}\mathcal{L}(b(t))$$

Ejemplo 37. Hallar la exponencial de $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$s\mathbb{I} - A = \begin{pmatrix} s+1 & 4 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \begin{pmatrix} s+1 & -4 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbb{I} - A)^{-1}\right) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(2t) & -2e^{-t}\sin(2t) \\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t) & e^{-t}\cos(2t) \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 38. Veamos un ejemplo con una ecuación diferencial con coeficientes no constantes.

$$2t + \frac{dy}{dt} + y = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} -2\frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] + Y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2Y - 2s\frac{dY}{ds} + Y = 0 \Leftrightarrow 2s\frac{dY}{ds} + Y = 0$$

La solución es $y(t) = \sqrt{t}$ (lo veremos más adelante). Nótese que en este caso no tenemos ninguna garantía de que existe la transformada de Laplace de la solución.

Ejemplo 39. Ahora consideremos:

$$t\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} s\frac{dY}{ds} = Y \Leftrightarrow Y(s) = As$$

Pero, ahora nos encontramos ante un problema: No existe ninguna función cuya transformada sea s. En este caso, no podemos usar la transformada de Laplace para hallar la solución. La verdadera solución es $y(t) = \frac{A}{t^2}$ (lo veremos más adelante).

Ejemplo 40. Tenemos un circuito RLC.

13/11/2018 Dibujo 1

Conocemos las relaciones constitutivas:

$$\begin{gathered} V = IR \\ V = L\frac{dI}{dt} \\ C\frac{dV}{dt} = I \end{gathered}$$

Luego, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} V_{in} = RI + L\frac{dI}{dt} + V_C \\ I = C\frac{dV_C}{dt} \end{gathered}$$

con condiciones iniciales $I(0) = 0$, $V_C(0) = 0$. Aplicando la transformada de Laplace, llegamos a:

$$\begin{gathered} V_{in} = RI + sLI + V_C \\ I = CsV_C \end{gathered} \Rightarrow V_{in} = RI + sLI + \frac{1}{cS}I$$

13/11/2018 Dibujo 2

7. Sistemas lineales con coeficientes variables

7.1. Ecuaciones escalares (orden 1)

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)\,x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $a : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, pudiendo ser b continua a trozos y $t_0 \in I$.

7.1.1. Ecuación homogénea $b = 0$

$$\dot{x} = a(t)\,x$$

Si tomamos:

$$\frac{d}{dt}\ln(x) = \frac{\dot{x}}{x} = a(t)$$

Entonces:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\ln|x|(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|x(t)| - \ln|x(t_0)| = \ln\left|\frac{x(t)}{x(t_0)}\right|$$

$$\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

$$|x(t)| = |x_0|\,e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

Proposición 10. *La única solución de* $\begin{cases} \dot{x} = a(t)\,x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *es:*

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

Demostración.

$$\frac{dx}{dt}(t) = x_0 a(t)\,e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = a(t)\,x(t)$$

$$x(t_0) = x_0 e^0 = x_0$$

Además, es única: Si $y(t)$ es otra solución, entonces $z(t) = y(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ satisface:

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + y(t)\left(-a(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\right) =$$

$$= a(t)\,y(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} - a(t)\,y(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = 0$$

Por tanto, $z(t)$ es constante en I y su valor es:

$$Z(t) = Z(t_0) = y(t_0)\, e^{-0} y(t_0) = x_0$$

Despejando:

$$y(t) = z(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau} = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau}$$

que es la misma que teníamos. $\square$

Ejemplo 41. $\begin{cases} \dot{x} = tx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

En este caso $a(t) = t$ y supondremos $I = \mathbb{R}$.

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \tau d\tau = \left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2$$

Por tanto:

$$x(t) = x_0 e^{\frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)}$$

7.1.2. Ecuación completa

Teorema 17. *El problema de valor inicial* $\begin{cases} \dot{x} = a(t)\, x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *tiene una solución única dada por:*

$$x(t) = R(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)\, b(\tau)\, d\tau$$

donde:

$$R(t, \tau) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s) ds}$$

Demostración. Sea:

$$z(t) := \frac{x(t)}{R(t, t_0)} = x(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s) ds}$$

Su derivada es:

$$\dot{z}(t) = [\dot{x}(t) - a(t)\, x(t)]\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s) ds}$$

de forma que x es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = a(t)\, x + b(t)$ si y solo si z satisface:

$$\dot{z}(t) = b(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s) ds}$$

Integrando en $[t_0, t]$ (o $[t_0, t]$):

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} d\tau$$

y:

$$z(t_0) = x_0 e^0 = x_0$$

de forma que:

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau$$

y despejando:

$$x(t) = z(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} =$$

$$= x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} d\tau =$$

$$= x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds - \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau =$$

$$= x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds} d\tau$$

$\square$

Ejemplo 42. $\begin{cases} \dot{x} = tx + t \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$$R(t,\tau) = e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds} = e^{\int_{\tau}^{t} sds} = e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)}$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x_h = R(t,t_0)\, x_0 = x_0 e^{\frac{1}{2}\left(t^2-t_0^2\right)}$$

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} d\tau = e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{t_0}^{t} \tau e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau =$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2} - \left[e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\right]_{t_0}^{t} = e^{\frac{1}{2}t^2}\left(-e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t_0^2}\right) = e^{\frac{1}{2}\left(t^2-t_0^2\right)} - 1$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = (x_0+1)\, e^{\frac{1}{2}\left(t^2-t_0^2\right)} - 1$$

7.2. La desigualdad de Grönwall

Teorema 18 (desigualdad de Grönwall en forma diferencial)**.** *Sean $U(t)$ y $a(t)$ continuas en $[t_0,t_1]$ con $t_1 \geq t_0$ y con $U(t)$ derivable y tal que:*

$$\dot{U}(t) \leq a(t)\, U(t) \;\; \forall t \in [t_0,t_1]$$

Entonces:

$$U(t) \leq U(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \; \forall t \in [t_0,t_1]$$

Demostración. Multiplico $\dot{U}(t) \leq a(t)\, U(t)$ por $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ y paso todo a la izquierda:

$$\dot{U}(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - a(t)\, U(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[U(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right] \leq 0$$

Por tanto $\varphi(t) = U(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ satisface:

$$\varphi(t) \leq \varphi(t') \ \ \forall t \geq t'$$

y para $t' = t_0$, tengo:

$$\varphi(t) = U(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \leq U(t_0)\, e^{0} = \varphi(t_0) \ \ \forall t > t_0$$

Multiplicando por $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ tengo:

$$U(t) \leq U(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

□

Teorema 19 (desigualdad de Grönwall, forma integral)**.** *Sean $u(t)$, $a(t)$ funciones continuas en $[t_0, t_1]$. Si $a(t) \geq 0\ \forall t \in [t_0, t_1]$ y $c \in \mathbb{R}$ satisfacen:*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

entonces:

$$u(t) \leq c e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \ \forall t \in [t_0, t_1]$$

Demostración. Sea $U(t) = c + \int_0^t a(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\ \forall t \in [t_0, t_1]$; de forma que $u(t) \leq U(t)$. U es continua y derivable en (t_0, t_1) y su derivada es:

$$\dot{U}(t) = a(t)\, u(t)$$

Como $u(t) \leq U(t)$ y $a(t) \geq 0$, tenemos que:

$$\dot{U}(t) = a(t)\, u(t) \leq a(t)\, U(t)$$

Por la desigualdad de Grönwall en forma diferencial, se tiene que:

$$U(t) \leq \underbrace{U(t_0)}_{=c} e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \ \forall t \in [t_0, t_1]$$

Así:

$$u(t) \leq U(t) \leq c e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \ \forall t \in [t_0, t_1]$$

□

7.3. Sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \dots a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t) \\ x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

donde $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas $\forall i, j = 1, \dots, n$ y $b_i : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas $i = 1, \dots, n$.
Alternativamente podemos expresar el sistema en forma matricial:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rccc} A: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \int \mathbb{R}^{(n,n)} \\ & t & \longrightarrow & A(t) \\ b: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longrightarrow & b(t) \end{array}\right\} \text{continuas}$$

Si $b(t) = 0\ \forall t \in I$ homogénea.

7.3.1. Solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)\,X \\ X(t_0) = X \end{cases}$$

Teorema 20 (existencia y unicidad)**.** *Si $A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}$ es continua, entonces el problema de valor inicial:* $\begin{cases} \dot{X} = A(t)\,X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ *tiene una única solución $X(t)$ definida para todo $t \in I$.*

Lema 1. *Si X es la solución de $\dot{X} = A(t)\,X$, $X(t_0) = 0$, entonces $X(t) = 0\ \forall t \in I$.*

Demostración. $X(t) = 0\ \forall t \in I$ cumple la ecuación diferencial y la condición inicial. Como el problema de valor inicial tiene una única solución entonces $X = 0$. □

Teorema 21 (Principio de superposición lineal)**.** *El conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones de la ecuación $\dot{X} = A(t)\,X$ es un subespacio vectorial de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ya que $X(t) = 0\ \forall t \in I$ es solución. Sean $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$,es decir, $\begin{matrix} \dot{X}_1(t) = A(t) X_1(t) \ \forall t \in I \\ \dot{X}_2(t) = A(t) X_2(t) \ \forall t \in I \end{matrix}$

Entonces $X_1 + X_2 \in \mathcal{S}$, ya que:

$$\frac{d}{dt}(X_1 + X_2)(t) = \frac{dX_0}{dt}(t) + \frac{dX_2}{dt}(t) = A(t) X_1(t) + A(t) X_2(t) = A(t)(X_1(t) + X_2(t))$$

Sea $X \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda X \in \mathcal{S}$:

$$\frac{d}{dt}(\lambda X)(t) = \lambda A(t) X(t) = A(t)(\lambda X(t))$$

□

Ejercicio 11. $L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$ con $L(x)(t) = \frac{dX}{dt}(t) - A(t) X(t)$

Probar que es lineal y $\ker L = \mathcal{S}$.

Teorema 22. *$\dim \mathcal{S} = n$ y fijado un $t_0 \in I$ $\begin{matrix} ev_{t_0} : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & X & \longrightarrow & X(t_0) \end{matrix}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $ev_{t_0} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación $ev_{t_0}(X) = X(t_0)$ es isomorfismo.

- Es lineal: trivial.
- Es inyectiva: $\ker ev_{t_0} = \{0\}$. El único elemento del núcleo es la función nula. Si $X \in \ker ev_{t_0}$,es decir, $X \in \mathcal{S}$ y $X(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ o equivalentemente $\begin{matrix} (X \in \mathcal{S}) \\ X(t) = 0 \end{matrix} \begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$. Como este problema de valor inicial tiene solución única es $X(t) = 0\ \forall t \in I$.
- Es sobreyectiva: Dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$ veamos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $ev_{t_0}(X) = X_0$. Sea X la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ por el teorema de existencia y unicidad. Entonces $X \in \mathcal{S}$, ya que es solución de la ecuación homogénea, y $ev_{t_0}(X) = X(t_0) = X_0$.

□

Por tanto, para encontrar la solución general de $\dot{X} = A(t) X$ tendré que encontrar n soluciones linealmente independientes. Entonces la solución general será una combinación lineal arbitraria de ellas:

$$\mathcal{S} = \{\lambda_1 X_1 + \ldots \lambda_n X_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 23. *Para cada pareja $t_0, t_1 \in I$ existe una única matriz $R(t_1, t_0) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ tal que la solución de $\begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ es*

$$X(t) = R(t, t_0) X_0$$

La familia de matrices R satisface:

1.

$$R(t_0, t_0) = \mathbb{I}_n \ \forall t_0 \in I$$

2.

$$R(t_1, t_0) = R(t_0, t_1)^{-1} \ \forall t_0, t_1 \in I$$

3.

$$R(t_2,t_1)\,R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)\ \forall t_0,t_1,t_2 \in I$$

Demostración. Sabemos que para cada $t_0 \in I$ la aplicación $\begin{array}{rccc} ev_{t_0}: & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & X & \longrightarrow & X(t_0) \end{array}$ es lineal e invertible. Consideremos la aplicación $\rho(t_1,t_0) = ev_{t_1} \circ ev_{t_0}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que es lineal. La matriz coordenada (en la base canónica de $\mathbb{R}^n$) la llamo $R(t_1,t_0)$, de forma que $\rho(t_1,t_0)(X_0) = R(t_1,t_0)\,X_0$.

Sea X solución de $\dot{X} = A(t)\,X$,$X(t_0) = X_0$. Entonces, el valor de la función X en $t \in I$ es $X(t) = ev_t(X)$. Además, la solución del problema de valor inicial anterior es $X = (ev_{t_0})^{-1}(X_0)$, de forma que:

$$X(t) = ev_t\left(ev_{t_0}^{-1}(X_0)\right) = \left(ev_t \circ ev_{t_0}^{-1}\right)(X_0) = \rho(t,t_0)(X_0) = R(t,t_0)\,X_0$$

Veamos el resto de propiedades:

1. $R(t_0,t_0)$: $\rho(t_0,t_0) = ev_{t_0} \circ ev_{t_0}^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, cuya matriz coordenada es $\mathbb{I}_n$.

3.
$$\begin{aligned}\rho(t_2,t_1) \circ \rho(t_1,t_0) &= \left(ev_{t_2} \circ ev_{t_1}^{-1}\right) \circ \left(ev_{t_1} \circ ev_{t_0}^{-1}\right) \\ &= ev_{t_2} \circ \underbrace{ev_{t_1}^{-1} \circ ev_{t_1}}_{=id} \circ ev_{t_0}^{-1} = ev_{t_2} \circ ev_{t_0}^{-1} = \rho(t_2,t_0)\end{aligned}$$

   y la propiedad se deduce tomando matrices coordenadas.

2. Tomo $t_2 = t_0$ en (3):
$$R(t_0,t_1)\,R(t_{1,},t_0) = R(t_0,t_0) \overset{(1)}{=} \mathbb{I}_n$$
   luego $R(t_1,t_0)$ y $R(t_0,t_1)$ son inversas.

□

Definición 10. La matriz R del teorema anterior se llama matriz resolvente, matriz fundamental canónica o matriz de transición de estados.

Caso particular: Si $A(t)$ es constante, entonces $R(t,\tau) = e^{(t-\tau)A}$.

Observación 14 (¡Muy importante!). **PERO**, en general $R(t,\tau)$ y $e^{A(t)}$ **NO** tienen **NADA** que ver.

Ejemplo 43. Suponemos que tenemos dos variables x_1, x_2 y una variable independiente t:

26/11/2018 Dibujo 1

$$X_1 = R(t_1,t_0)\,X_0$$

$$X_2 = R(t_2,t_0)\,X_0$$

De manera que:

$$X_2 = R(t_2,t_0)\,X_0 = R(t_2,t_1)\,X_1 = R(t_2,t_1)\,R(t_1,t_0)\,X_0$$

Ejemplo 44. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + ty \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

$$y(t) = e^{2(t-t_0)} y_0$$

donde $y_0 = y(t_0)$. Ahora, sustituyendo en la ecuación de arriba, obtenemos:

$$x(t) = x_0 e^{t-t_0} + y_0 e^{t-t_0} \left(1 - t_0 + (1-t) e^{t-t_0}\right)$$

De forma que:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t-t_0} & e^{t-t_0}\left(1 - t_0 + (1-t) e^{t-t_0}\right) \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}}_{R(t,t_0)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = R(t, t_0) X_0$$

En este caso, hemos podido hallar $R(t, t_0)$ porque $A(t)$ es triangular.

Ahora, si además es $X(2) = (1, 1)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R(t, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-2} + e^{t-2}\left(-1 + (1-t) e^{t-2}\right) \\ e^{2(t-2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t) e^{2(t-2)} \\ e^{2(t-2)} \end{pmatrix}$$

Teorema 24. *La matriz resolvente $R(t, \tau)$ satisface:*

$$\tfrac{\partial R}{\partial t}(t, \tau) = A(t) R(t, \tau) \qquad R(\tau, \tau) = \mathbb{I}_n$$

Recíprocamente si $P(t, \tau)$ es una matriz que depende de dos variables $t, \tau \in I$ y satisface:

$$\tfrac{\partial P}{\partial t}(t, \tau) = A(t) P(t, \tau) \qquad P(\tau, \tau) = \mathbb{I}_n$$

entonces $P = R$.

Demostración. La solución de $\dot{X} = A(t) X$ con $X(t_0) = X_0$ es $X(t) = R(t, t_0) X_0$. Así:

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) X_0$$

Por otra parte, como debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$A(t) X(t) = \frac{dX}{dt}(t) = A(t) R(t, t_0) X_0$$

y como esto es cierto para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$ se deduce que $\frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = A(t) R(t, t_0)$, que también es cierto $\forall t, t_0 \in I$. Además, ya sabemos que $R(t_0, t_0) = \mathbb{I}_n$.

Recíprocamente, supongamos que P satisface las propiedades citadas. Entonces fijo $t_0 \in I$ y defino

$$X(t) := P(t, t_0) X_0$$

con $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y así:

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{d}{dt} P(t, t_0) X_0 = \frac{\partial P}{\partial t}(t, t_0) X_0 = A(t) P(t, t_0) X_0 = A(t) X(t)$$

de forma que X es solución de la ecuación homogénea. Además, para $t = t_0$:

$$X(t_0) = P(t_0, t_0) X_0 = \mathbb{I}_n X_0 = X_0$$

En definitiva, X es solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t) X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$. Como este problema tiene solución única $X(t) = R(t, t_0) X_0$, entonces debe ser $R(t, t_0) X_0 = P(t, t_0) X_0$ y siendo cierto esto para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$, se deduce que $P(t, t_0) = R(t, t_0)$. Como, además, t y t_0 son arbitrarios en I, deducimos que $P = R$. $\square$

7.4. Sistemas y matrices fundamentales

Definición 11. Una base del espacio vectorial de soluciones de $\dot{X} = A(t) X$ se denomina un sistema fundamental de soluciones.

Observación 15. Dadas n soluciones $X_1, \ldots, X_n$, para saber si son un sistema fundamental hay que comprobar que:

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n = (X_1 | X_2 | \ldots | X_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Definición 12. Una matriz cuadrada $n \times n$ cuyas columnas forman un sistema fundamental de soluciones se llama una matriz fundamental.

Observación 16. Lo siguiente es todo equivalente:

$$\{X_1 \ldots, X_n\} \text{ sistema fundamental} \Leftrightarrow M(t) = (X_1(t) | \ldots | X_n(t)) \text{ matriz fundamental}$$

Toda solución se puede escribir de manera única:

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t)$$

Equivalentemente:

$$X(t) = M(t) \alpha$$

con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Proposición 11. *Sea $S(t)$ una matriz $n \times m$ cuyas columnas son soluciones de $\dot{X} = A(t) X$ y sea $t_0 \in I$.*

1. *Existe una matriz $S_0 \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ tal que $S(t) = R(t, t_0) S_0$. En particular, $S(t_0) = S_0$.*
2. *Si s es cuadrada, $n = m$, entonces S es una matriz fundamental si y sólo si $S(t_0)$ es invertible.*

Demostración.

1. $S = (X_1 | \ldots | X_m)$ con X_i solución de $\dot{X} = A(t) X$. Entonces $X_i(t) = R(t, t_0) X_i(t_0)$ de forma que:

$$S(t) = [X_1(t) | \ldots | X_m(t)] = [R(t, t_0) X_1(t_0) | \ldots | R(t, t_0) X_m(t_0)] = R(t, t_0) [X_1(t_0) | \ldots | X_m(t_0)] =$$
$$= R(t, t_0) S(t_0)$$

2. Si $S(t) = R(t, t_0) S(t_0)$, $S(t)$ es regular $\Leftrightarrow$ $S(t_0)$ es regular.

$\square$

Corolario 1. *Una matriz cuadrada $n \times n$ formada por soluciones es fundamental si y sólo si es regular en algún $t_0 \in I$.*

Sea $M(t)$ una matriz fundamental. Toda solución de $\dot{X} = AX$ se puede poner como $X(t) = M(t)\alpha$. Si, además, $X(t_0) = X_0$, entonces α es la solución de $X_0 = X(t_0) = M(t_0)\alpha$, es decir, $\alpha = M^{-1}(t_0) X_0$. En consecuencia, la solución de $\begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ es:

$$X(t) = M(t)\alpha = M(t) M^{-1}(t_0) X_0$$

y como sabemos que dicha solución es $X(t) = R(t, t_0) X_0$, deducimos que:

$$R(t, t_0) = M(t) M^{-1}(t_0)$$

Ejemplo 45. $\begin{cases} \dot{x} = x + ty \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

Hallemos una solución del sistema anterior:

$$\dot{y} = 2y \longrightarrow y(t) = e^{2t}$$

tomando $y(0) = 1$. Ahora:

$$\dot{x} = x + te^{2t}$$

Una solución de esta segunda es:

$$x = (A + Bt)^{2t} \longrightarrow x = (t-1) e^{2t}$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} (t-1) e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \longrightarrow X_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, hallemos otra solución del sistema anterior:

$$\dot{y} = 2y \longrightarrow y = 0$$

$$\dot{x} = x + 0 \longrightarrow e^t$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow X_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De forma que la solución general será:

$$X(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} (t-1) e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} (t-1) e^{2t} & e^t \\ e^{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental.

$$M'(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t}(t-1) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

también es fundamental. Hallemos su inversa:

$$M'^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^{-t_0} & e^{-t_0}(1-t_0) \\ 0 & e^{-2t_0} \end{pmatrix}$$

$$R(t,t_0) = M(t)\, M^{-1}(t_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & (1-t_0)\, e^{t-t_0} + (t-1)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Si ahora, nos imponen $x(3) = 1$ y $y(3) = -1$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R(t,3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-3} & (1-t_0)\, e^{t-3} + (t-1)\, e^{2(t-3)} \\ 0 & e^{2(t-3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7.5. Casos particulares

- $n = 1$. Lo sabemos resolver.
- $n > 1$. $A(t)$ es triangular (superior) [O reordenando filas y columnas es triangular]: Se resuelve la última (sólo depende e una variable), se sustituye en la anterior y se resuelve, se sustituye en la anterior y así sucesivamente.
- $n > 1$. $A(t)$ es tal que existe una primitiva $B(t)$ tal que $A(t)\, B(t) = B(t)\, A(t)$. En ese caso, $M(t) = e^{B(t)}$ es una matriz fundamental.

7.6. Solución de la ecuación no homogénea

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)\, X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$X(t) = R(t,t_0)\, Z(t)$$

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)\, Z(t)\right) = \frac{\partial R}{\partial t}(t,t_0)\, Z(t) + R(t,t_0)\, \frac{dZ}{dt}(t) =$$

$$= A(t) \underbrace{R(t,t_0)\, Z(t)}_{=X(t)} + R(t,t_0)\, \frac{dZ}{dt}$$

$$R(t,t_0)\, \dot{Z} = b(t)$$

$$\dot{Z} = R^{-1}(t,t_0)\, b(t) = R(t_0,t)\, b(t)$$

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,\tau)\, b(\tau)\, d\tau$$

$$Z(t_0) \to X(t_0) = \underbrace{R(t_0,t_0)}_{=\mathbb{I}_n} Z(t_0) \to Z(t_0) = X_0$$

$$Z(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau)\, b(\tau)\, d\tau$$

$$X(t) = R(t, t_0)\, Z(t) = R(t, t_0)\, X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)\, R(t_0, \tau)\, b(\tau)\, d\tau =$$

$$= R(t, t_0)\, X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)\, b(\tau)\, d\tau$$

Teorema 25. *El problema de valor inicial* $\begin{cases} \dot{X} = A(t)\, X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ *tiene una única solución definida en* I *que se puede expresar de la forma:*

$$X(t) = \underbrace{R(t, t_0)\, X_0}_{=X_h(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} R(t, \tau)\, b(\tau)\, d\tau}_{=X_p(t)}$$

Ejemplo 46. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$R(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & (1-\tau)\, e^{t-\tau} + (t-1)\, e^{2(t-\tau)} \\ 0 & e^{2(t-\tau)} \end{pmatrix}$$

$$X_h(t) = R(t, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(t-1) \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \int_0^t R(t, \tau)\, b(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} e^{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(t-1) + te^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si $A(t)$ es constante $A \equiv A(t)$, entonces $R(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}$:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau$$

Teorema 26. *El conjunto de soluciones de* $\dot{X} = A(t)\, X + b(t)$ *es un subespacio afín de* $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *cuyo espacio vectorial de dirección es el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea.*

Si $M(t)$ es una matriz fundamental entonces $R(t, \tau) = M(t)\, M^{-1}(\tau)$.

$$X(t) = M(t)\, M^{-1}(t_0)\, X_0 + \int_{t_0}^{t} M(t)\, M^{-1}(\tau)\, b(\tau)\, d\tau =$$

$$= M(t) \left[\underbrace{M^{-1}(t_0)\, X_0}_{=:C} + \int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)\, b(\tau)\, d\tau \right] =$$

$$= M(t) \left[C + \int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)\, b(\tau)\, d\tau \right]$$

con C la solución de $M(t_0)\, C = X_0$.

7.7. Ecuaciones escalares de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, \dot{y} + a_0(t)\, y = f(t)$$

con $y(t_0) = y_0^0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)\, X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} y_0^0 \\ \vdots \\ y_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si X es la solución del sistema $y = \langle e_1, x \rangle$ es solución de la ecuación de orden n.

La solución del sistema asociado es $X(t) = R(t, t_0)\, X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)\, b(\tau)\, d\tau$ y la solución de la ecuación de orden n es su primera componente.

- Ecuación homogénea $b = 0$. $X(t) = R(t, t_0)\, X_0$.

  $$y(t) = \langle e_1, X(t) \rangle = \langle e_1, R(t, t_0)\, X_0 \rangle = \text{primera fila de } R(t, t_0) \cdot X_0$$

  El conjunto de soluciones de la ecuación de orden n es un espacio vectorial de dimensión n. Una base está formada por los elementos de la primera fila de $R(t, t_0)$. Alternativamente, cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes.

- Ecuación completa:

  $$y(t) = \langle e_1, X(t) \rangle = \underbrace{\langle e_1, R(t, t_0)\, X_0 \rangle}_{= y_h(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \langle e_1, R(t, \tau) \rangle\, b(\tau)\, d\tau}_{= y_p(t)}$$

  Como es $b(t) = f(t)\, e_n$:

  $$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} \langle e_1, R(t, \tau)\, b(\tau) \rangle\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\langle e_1, R(t, \tau)\, e_n \rangle}_{=: g(t, \tau)} f(\tau)\, d\tau =$$

  $$= \int_{t_0}^{t} g(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

donde $g(t,\tau)$ es la función de Green. Podemos ver que:

$$g(t,\tau)=\underbrace{\left\langle e_1,\underbrace{R(t,\tau)\,e_n}_{=\text{solución del sistema homogéneo con } X(\tau)=e_n}\right\rangle}_{\substack{=\text{ solución de la ecuación de orden } n \text{ homogénea}\\ y(\tau)=0,\dot{y}(\tau)=0,\dots,y^{n-2}(\tau)=0,y^{(n-1)}(\tau)=1}}$$

Teorema 27. *La solución del problema de valor inicial* $\begin{cases} y^{(n)}+a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)\,y=f(t)\\ y(t_0)=y_0^0,\dots,y_1^{(n-1)}=y_0^{n-1}\end{cases}$ *se puede escribir* $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ *donde* $y_h(t)$ *es la solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales dadas e* $y_p(t)$ *es:*

$$y_p(t)=\int_{t_0}^{t}g(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

y donde $g(t,\tau)$ *es la función de Green, que es la solución de:*

$$\begin{cases} y^{(n)}+a_{n-1}(t)\,y^{n-1}+\cdots+a_0(t)\,y=0\\ y(\tau)=0,\dot{y}(\tau)=0,\dots,y^{(n-2)}(\tau)=0,y^{(n-1)}(\tau)=1\end{cases}$$

Ejemplo 47. $\begin{cases}(t-1)\,\ddot{y}-t\dot{y}+y=(t-1)^2e^t\\ y(0)=1,\dot{y}(0)=1\end{cases}$

La ecuación homogénea es:

$$(t-1)\,\ddot{y}-t\dot{y}+y=0$$

Si tomamos $y=At+B\Rightarrow\begin{cases}\dot{y}=A\\ \ddot{y}=0\end{cases}$, vemos que y es solución:

$$(t-1)\cdot 0-tA+At+B=0\Leftrightarrow B=0\Rightarrow y=At$$

es solución.

Ahora, si probamos $y=e^{at}\Rightarrow\begin{cases}\dot{y}=ae^{at}\\ \ddot{y}=a^2e^{at}\end{cases}$, sustituyendo:

$$\left((t-1)\,a^2-ta+1\right)e^{at}=0\Leftrightarrow$$

$$(t-1)\,a^2-ta+1=0\ \forall t\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-a=0\Leftrightarrow a=0,1\\ a^2-1=0\Leftrightarrow a=-1,1\end{cases}\Rightarrow a=1$$

luego $y(t)=e^t$ es solución. Las dos soluciones halladas son linealmente independientes: $\alpha e^t+\beta t=0\Leftrightarrow a=\beta=0$. De esta forma:

$$y(t)=At+Be^t$$

$$\begin{cases}y(0)=B=1\\ \dot{y}(0)=A+B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=1\\ A=0\end{cases}$$

Ahora, hallemos la función de Green:

$$\begin{cases}0=y(\tau)=Be^{\tau}+A\tau\\ 1=\dot{y}(\tau)=Be^{\tau}+A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\frac{\tau}{\tau-1}e^{-\tau}\\ A=\frac{1}{1-\tau}\end{cases}$$

de forma que:

$$g(t,\tau) = \frac{\tau}{\tau-1}e^{-\tau}e^{t} + \frac{1}{1-\tau}t$$

En consecuencia:

$$f(t) = \frac{(t-1)^2 e^t}{t-1} = (t-1)e^t$$

$$y_p(t) = \int_0^t \left(\frac{\tau}{\tau-1}e^{t-\tau} - \frac{t}{\tau-1}\right)(\tau-1)e^t d\tau =$$

$$= \int_0^t \left[\tau e^t - te^{\tau}\right] d\tau = \frac{1}{2}t^2e^t - t\left(e^t-1\right)$$

Por consiguiente:

$$y(t) = e^t + \frac{1}{2}t^2e^t - t\left(e^t-1\right)$$

7.7.1. Caso de coeficientes constantes

$$g(t,\tau) = \langle e_1, R(t,\tau)e_n\rangle = \left\langle e_1, e^{(t-\tau)A}e_n\right\rangle = \gamma(t-\tau)$$

7.7.2. Facilitarse la vida para probar independencia lineal

Sea $\{y_1,\ldots,y_n\}$ una solución de la ecuación de orden n. Serán base si y sólo si son linealmente independientes, es decir, y y solo si:

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

$$y_1 \longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad y_n \longrightarrow X_n = \begin{pmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Alternativamente, lo anterior se cumplirá si la matriz:

$$M(t) = [X_1(t)|\ldots|X_n(t)]$$

es regular. Y sabemos, que la matriz $M(t)$ es regular si y solo si $M(t_0)$ es regular para algún $t_0 \in I$. En este caso la matriz quedaría:

$$M(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix}$$

Esta matriz recibe el nombre de matriz Wronskiana y su determinante se llama Wronskiano. Se suele usar este método para comprobar que las soluciones halladas son linealmente independientes. En el caso de nuestro ejemplo anterior sería:

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}$$

$$\det M(0) = -1 \neq 0$$

Sin embargo, $\det M(1) = 0$. Esto se debe a que 1 no está en el intervalo para el cual está definida la solución de mi problema. El dominio de la solución del ejercicio anterior es $I = (-\infty, 1)$.

- Para $n = 2$, podemos calcular la función de Green, como:

$$g(t,\tau) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(\tau) & y_2(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) \\ \dot{y}_1(\tau) & \dot{y}_2(\tau) \end{vmatrix}}$$

se obtiene a través de la regla de Cramer aplicada al sistema:

$$\begin{cases} y(\tau) = 0 \\ \dot{y}(\tau) = 1 \end{cases}$$

7.8. Reducción de orden

El problema real siempre va a ser encontrar suficientes soluciones de la ecuación homogénea. Imaginemos que tenemos:

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = f(t)$$

Supongamos que $y_1(t)$ es una solución de la ecuación homogénea. Ahora, buscamos una solución de la ecuación (homogénea o no) de la forma $y(t) = u(t)y_1(t)$.

$$y(t) = u(t)y_1(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t)y_1(t) + u(t)\dot{y}_1(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{u}(t)y_1(t) + 2\dot{u}(t)\dot{y}_1(t) + u(t)\ddot{y}_1(t)$$

Y, ahora, sustituimos en la ecuación original:

$$\ddot{u}y_1 + 2\dot{u}\dot{y}_1 + u\ddot{y}_1 + a\dot{u}y_1 + au\dot{y}_1 + buy_1 = f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1\ddot{u} + (2\dot{y}_1 + ay_1)\dot{u} + \underbrace{(\ddot{y}_1 + a\dot{y}_1 + by_1)}_{=0}u = f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1\ddot{u} + (2\dot{y}_1 + ay_1)\dot{u} = f(t)$$

Ahora, si llamo $z := \dot{u}$, tenemos:

$$\begin{cases} y_1\dot{z} + (2\dot{y}_1 + ay_1)z = f(t) \\ \dot{u} = z \end{cases}$$

Ejemplo 48. $2t^2\ddot{y} - 3t\dot{y} + 2y \; \forall t \in (0, \infty)$

Probamos con un polinomio de grado dos:

$$y = \gamma t^2 + \alpha t + \beta$$

$$\dot{y} = 2\gamma t + \alpha$$

$$\ddot{y} = 2\gamma$$

$$2t^2 2\gamma - 3t\left(2\gamma t + \alpha\right) + 2\left(\gamma t^2 + \alpha t + \beta\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De manera que $y_1(t) = t^2$ es solución.

Ahora, tomando $y = t^2 u$:

$$\dot{y} = 2tu + t^2\dot{u}$$

$$\ddot{y} = 2u + 4t\dot{u} + t^2\ddot{u}$$

Llegamos a:

$$2t\ddot{u} + 5\dot{u} = 0$$

Llamando $z = \dot{u}$:

$$2t\dot{z} + 5z = 0$$

$$\dot{z} = -\frac{5}{2t}z$$

$$z = ce^{\int -\frac{5}{2s}ds} = ct^{-\frac{5}{2}}$$

$$y = t^2 u = t^2\left(ct^{-\frac{3}{2}} + c'\right)$$

$$y_2(t) = \sqrt{t}$$

7.9. Ecuaciones de Cauchy-Euler

Son de la forma:

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 t\dot{y} + a_0 y = f(t)$$

con $a_i \in \mathbb{R}$.

7.9.1. Orden 1:

$$t\dot{y}+\alpha y=0\Leftrightarrow\dot{y}=-\frac{\alpha}{t}y$$

Tenemos fórmula, así que la aplicamos. Suponemos $t>0$ y escogemos $t_0=1$.

$$y\left(t\right)=y_0e^{\int_1^t-\frac{\alpha}{\tau}d\tau}=y_0e^{-\left[a\ln\tau\right]_1^t}=y_0e^{-a\ln t}=y_0t^{-\alpha}$$

En consecuencia, en la práctica lo más fácil es probar $y=t^s$ y hallar el valor de s:

$$t\dot{y}+\alpha y=tst^{s-1}+\alpha t^s=t^s\left(s+\alpha\right)=0\;\forall t>0\Leftrightarrow s+\alpha=0$$

7.9.2. Orden 2:

$$t^2\ddot{y}+\alpha t\dot{y}+\beta y=0$$

De nuevo, probamos con $y=t^s\Rightarrow\dot{y}=st^{s-1}\Rightarrow\ddot{y}=s\left(s-1\right)t^{s-2}$:

$$t^2\ddot{y}+\alpha t\dot{y}+\beta y=t^2s\left(s-a\right)t^{s-2}+\alpha tst^{s-1}+\beta t^s=t^s\left(s\left(s-1\right)+\alpha s+\beta\right)=0\;\forall t>0\Leftrightarrow s\left(s-1\right)+\alpha s+\beta=0$$

De esa ecuación de segundo grado, obtenemos $s=\mu_1,\mu_2$ y, en consecuencia, la solución es:

$$y_1\left(t\right)=t^{\mu_1}\qquad y_2\left(t\right)=t^{\mu_2}$$

De forma que la solución general es:

$$y\left(t\right)=At^{\mu_1}+Bt^{\mu_2}$$

Ejemplo 49. $2t^2\ddot{y}-3t\dot{y}+2y=0$

Por lo visto antes, debe ser:

$$2s\left(s-1\right)-3s+2=0\Leftrightarrow2s^2-5s+2=0\Leftrightarrow s=2,\frac{1}{2}$$

$$y\left(t\right)=At^2+B\sqrt{t}$$

Ejemplo 50. $t^2\ddot{y}-t\dot{y}+5y=0$

$$s\left(s-1\right)-s+5=0\Leftrightarrow s^2-2s+5=0\Leftrightarrow s=1\pm2i$$

En consecuencia, la solución general es:

$$y\left(t\right)=At^{1+2i}+Bt^{1-2i}$$

Como la solución debe ser real, deben ser $A=\overline{B}$ con $A,B\in\mathbb{C}$.

Usando $a^x=e^{x\ln a}$, tenemos:

$$t^{a+ib}=e^{\left(a+ib\right)\ln t}=e^{a\ln t}e^{ib\ln t}=t^a\left[\cos\left(b\ln t\right)+i\sin\left(b\ln t\right)\right]$$

$$\mathrm{Re}\left(t^{a+ib}\right)=t^a\cos\left(b\ln t\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(t^{a+ib}\right) = t^a \sin\left(b \ln t\right)$$

De forma que:

$$y\left(t\right) = at \cos\left(2 \ln t\right) + Bt \sin\left(2 \ln t\right)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Raíz doble en la ecuación característica:

$$y_1\left(t\right) = t^{\mu}$$

Por reducción de orden, podemos hallar otra solución tomando $y\left(t\right) = t^n u\left(t\right)$ y llegamos a $t\ddot{u} = \dot{u}$ ¿usando $2\mu = 1 - \alpha$?

$$t\ddot{u} = \dot{u} \Leftrightarrow \dot{u} = \frac{c_2}{t} \Leftrightarrow u = c_1 + c_2 \ln t$$

En consecuencia, llegamos a:

$$y\left(t\right) = At^{\mu} + Bt^{\mu} \ln t$$

7.9.3. Cambio de variable independiente $t = e^{\tau} \Leftrightarrow \tau = \ln t$

Por la regla de la cadena es:

$$t\frac{d}{dt} = e^{\tau}\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = e^{\tau}\underbrace{\frac{1}{t}}_{=e^{\tau}}\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}$$

$$t\frac{d}{dt}\left(t\frac{df}{dt}\right) = t\left(\frac{df}{dt} + t\frac{d^2f}{dt^2}\right) = t^2\frac{d^2f}{dt^2} + t\frac{df}{dt}$$

$$t^2\frac{d^2}{dt^2} = t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\right) - t\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{d}{d\tau}$$

Y, así, podemos hallar todos los términos. Al final, obtenemos:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t\frac{dy}{dt} + \beta y = 0 \longrightarrow \frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{dt} + \alpha\frac{dy}{d\tau} + \beta y = 0$$

y la ecuación característica de esta última ecuación es:

$$s^2 - s + \alpha s + \beta = 0 \Leftrightarrow s\left(s-1\right) + \alpha s + \beta = 0 \longrightarrow s = \mu_1, \mu_2$$

Y una base de la ecuación de coeficientes constantes es:

$$e^{\mu_1 \tau} = \left(e^{\tau}\right)^{\mu_1} = t^{\mu_1}$$

$$e^{\mu_2 \tau} = \left(e^{\tau}\right)^{\mu_2} = t^{\mu_2}$$

En el caso de una raíz doble, obtendría:

$$e^{\tau\mu} = t^{\mu}$$

$$\tau e^{\tau\mu} = t^{\mu} \ln t$$

7.9.4. Orden n

Se puede ver por inducción que:

$$t^k \frac{d}{dt^k} = \underbrace{\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}-1\right)\left(\frac{d}{d\tau}-2\right)\dots\left(\frac{d}{d\tau}-k+1\right)}_{k \text{ factores}}$$

La ecuación anterior se transforma en una con coeficientes constantes cuya ecuación característica es:

$$p(s) = s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1) + a_{n-1}s(s-1)\dots(s-n+2)+\dots+a_1 s + a_0 = 0$$

Factorizamos:

$$p(s) = (s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2}\dots(s-\lambda_r)^{m_r}$$

y las soluciones son:

$$e^{t_1\tau}, \tau e^{\lambda_1\tau}, \tau^2 e^{\lambda_1\tau}, \dots, \tau^{m_1-1}e^{\lambda_1\tau}$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_r\tau}, \tau e^{\lambda_r\tau}, \dots, \tau^{m_r-1}e^{\lambda_r\tau}$$

Deshaciendo el cambio de variable $\tau = \ln t$, llegamos a:

$$t^{\lambda_1}, t^{\lambda_1}\ln t, t^{\lambda_1}(\ln t)^2, \dots, t^{\lambda_1}(\ln t)^{m_1-1}$$

$$\vdots$$

$$t^{\lambda_r}, t^{\lambda_r}\ln t, \dots, t^{\lambda_r}(\ln t)^{m_r-1}$$

Ejemplo 51. $t^4 y^{(4)} + 5t^3 y^{(3)} - 6t^2\ddot{y} + t\dot{y} - y = 0$

$$y = t^s$$

$$\dot{y} = st^{s-1}$$

$$\ddot{y} = s(s-1)t^{s-2}$$

$$y^{(3)} = s(s-1)(s-2)t^{s-3}$$

$$y^{(4)} = s(s-1)(s-2)(s-3)$$

$$t^4 s(s-1)(s-2)(s-3)t^{s-4} + 5t^3 s(s-1)(s-2)t^{s-3} - 6t^2 s(s-1)t^{s-2} + tst^{s-1} - t^s = 0$$

$$p(s) = s(s-1)(s-2)(s-3) + 5s(s-1)(s-2) - 6s(s-1) + s - 1 = 0$$

7.10. Otras ecuaciones conocidas

- Ecuación de Laguerre:
$$t\ddot{y} + (1-t)\,\dot{y} + \alpha y = 0$$
- Ecuación de Hermite:
$$\ddot{y} - 2t\dot{y} + \lambda y = 0$$
- Ecuación de Bessel:
$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + \left(t^2 - \nu^2\right) y = 0$$

Todas ellas se resuelven desarrollando en serie.

Ejemplo 52. $\ddot{x} + tx = 0 \wedge \begin{cases} x\,(0) = 1 \\ \dot{x}\,(0) = 0 \end{cases}$

Suponemos que la solución es de la forma:

$$x\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

$$\dot{x}\,(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}$$

$$\ddot{x}\,(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k t^{k-2}$$

Y sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + tx = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k t^{k-2} + t\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k =$$

$$= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+3)\,(m+2)\,c_{m+3}t^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{m+1} = 2c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+3)\,(m+2)\,c_{m+3} + c_m\right] t^{m+1} = 0 \;\forall t$$

Por tanto, debe ser:

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ (m+3)\,(m+2)\,c_{m+3} + c_m = 0 \;\forall m \geq 0 \end{cases}$$

Por las condiciones iniciales, obtenemos:

$$x\,(0) = c_0 = 1$$

$$\dot{x}\,(0) = c_1 = 0$$

Así, obtenemos:

$$c_{3k+2} = c_{3k+1} = 0 \;\forall k \geq 0$$
$$c_{k+3} = -\frac{c_k}{(k+3)\,(k+2)}$$

$$c_0 = 1$$

$$c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}$$

$$c_6 = \frac{1}{-6 \cdot 5} c_3 = \frac{1}{6 \cdot 5} \frac{1}{3 \cdot 2}$$

Así:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k} t^{3k}$$

Para ver cuál es el rango de convergencia de la serie, tendríamos que hallar el límite:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_{3k+1}}{c_{3k}} \right|$$

8. Propiedades cualitativas

Propiedades de las soluciones que se puedan deducir sin tener que encontrar explícitamente dichas soluciones.

Definición 13. Un sistema lineal $\dot{X} = A(t) X + b(t)$ definido en un intervalo $[t_0, \infty)$ se dice estable si toda solución del sistema homogéneo está acotada en $[t_0, \infty)$. Se dice que es asintóticamente estable si toda solución del sistema homogéneo tiene límite 0 cuando $t \to \infty$.

El sistema es inestable si no es estable, es decir, existe una solución que no está acotada.

$$X(t) = R(t, t_0) X_0$$

Proposición 12. $\dot{X} = A(t) X$ *es estable si y sólo si existe* $k > 0$ *tal que* $||R(t, t_0)|| \leq k$ *para todo* $t \geq t_0$.

Demostración. Cada columna de $R(t, t_0)$ es una solución del sistema homogéneo. Si $\dot{X} = A(t) X$ es estable, toda solución está acotada. En particular, todas las columnas están acotadas. Por tanto, cada componente está acotada.

Recíprocamente, si $||R(t, t_0)|| \leq k$, como toda solución es de la forma $X(t) = R(t, t_0) X_0$,tenemos que:

$$||X(t)|| = ||R(t, t_0) X_0|| \leq n ||R(t, t_0)|| \, ||X_0|| \leq nk \, ||X_0||$$

es decir, está acotada. □

Proposición 13. *El sistema* $\dot{X} = A(t) X$ *es asintóticamente estable si y sólo si* $\lim_{t \to \infty} R(t, t_0) = (0)$.

Demostración. $X(t) = R(t, t_0) X_0$

- Si $\lim_{t \to \infty} R(t, t_0) = 0$, entonces $\lim_{t \to \infty} X(t) = \lim_{t \to \infty} R(t, t_0) X_0 = 0 X_0 = 0$.
- Si es asintóticamente estable toda solución tiende a cero, en particular cada columna de $R(t, t_0)$ tiende a 0.

□

8.1. Estabilidad de sistemas con coeficientes constantes: $A(t)$ constante.

$A(t) \equiv A$. $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$

- estable si y sólo si existe $k \geq 0$ tal que $\left|\left|e^{tA}\right|\right| \leq k \ \forall t \geq 0$.
- asintóticamente estable si y sólo si $e^{tA} \xrightarrow[t\to\infty]{} (0)$.

$$p_A(s) = (s-\lambda_1)^{m_1} \dots (s-\lambda_r)^{m_r}$$

$$m_A(s) = (s-\lambda_1)^{\nu_1} \dots (s-\lambda_r)^{\nu_r}$$

$$X(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

con grado de $P_i < \nu_i$ y existen soluciones que alcanzan el grado máximo.

Tomando $\lambda = a + ib$:

$$\left|e^{\lambda t}\right| = \left|e^{at}\right| \left|e^{ibt}\right| = e^{at} \underbrace{\left|e^{ibt}\right|}_{=1} = e^{at} \begin{cases} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty & \text{si} \quad a > 0 \\ \xrightarrow[t\to\infty]{} \text{cte} & \text{si} \quad a = 0 \\ \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\left|e^{\lambda t} P(t)\right| = e^{at} \left|P(t)\right|$$

domina la exponencial salvo que sea $a = 0$.

Teorema 28. *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, real o compleja y consideremos el sistema $\dot{X} = AX$. Entonces:*

1. *El sistema es estable si y sólo si todos los valores propios de A tiene parte real menor o igual que 0 y las que tiene parte real nula son semisimples.*
2. *El sistema es inestable si y sólo si o bien existe un valor propio de A con parte real positiva o bien existe un valor propio de A con parte real nula y que no es semisimple.*
3. *El sistema es asintóticamente estable y sólo si todas los valores propios de A tienen parte real negativa.*

Demostración.

1. Supongamos que $\dot{X} = AX$ es estable. Si existiera un valor propio $\lambda = a + ib$ con $\mathrm{Re}(\lambda) = a > 0$, sea $v \neq 0$ un vector propio asociado a λ y la solución con $X(0) = v$, es decir, $X(t) = e^{tA}v = e^{\lambda t}v = e^{at}e^{ibt}v$. Cuando $t \to \infty$, $||X(t)|| = e^{at}\left|e^{ibt}\right| ||v|| = e^{at} ||v|| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ y así $X(t)$ no está acotada en $[0, \infty)$. Si existiera un valor propio con parte real nula $\lambda = ib$ y que no es semisimple, entonces existe un vector $v \in E_A(\lambda)$ (suponiendo que $(A - \lambda\mathbb{I}_n)^2 v = 0$) y $w = (A - \lambda\mathbb{I}_n) v \neq 0$. La solución con $X(0) = v$ es $X(t) = e^{tA}v = e^{\lambda t}\mathbb{I}_n v + t\underbrace{(A - \lambda\mathbb{I}_n) v}_{=w}$. Su norma es $||X(t)|| = \left|e^{ibt}\right| ||v + tw|| = ||v + tw|| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, ya que $w \neq 0$. De forma, que volvemos a llegar a contradicción.
   Recíprocamente, si todos los valores propios de A tienen parte real ≤ 0 y las que tienen parte real 0 son semisimples, toda solución es de la forma:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} P_j(t)$$

donde grado$P_i < \nu_j$. Los términos $e^{\lambda t} P_j(t)$ con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ tienden a cero cuando $t \to \infty$, $\left|\left|e^{\lambda t} P(t)\right|\right| = e^{at} \left|\left|P(t)\right|\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. Los términos $e^{\lambda t} P(t)$ con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, tienen grado$P = 0$ (ya que λ es semisimple): $\lambda = 0 + ib$, $e^{\lambda t} P(t) = e^{ibt} C$ ($P(t) = C$ constante). Estos términos están acotados $\left|\left|e^{\lambda t} P(t)\right|\right| = \left|e^{ibt}\right| ||c|| = ||c||$. En definitiva, todas los sumandos están acotados, por lo que el sistema es estable.

2. Es la negación de (1).

3. Supongamos que $\dot{X} = AX$ es asintóticamente estable, es decir, toda solución tiende a cero cuando $t \to \infty$. Si existiera un valor propio λ con parte real positiva, tomo un vector propio v asociado a dicho λ y la solución $X(t) = e^{tA} v = e^{\lambda t} v$ tiende a ∞ cuando $t \to \infty$, por lo que no puede tender a cero. Si existiese algún valor propio con parte real nula, $\lambda = ib$, tomo un vector propio v asociado a λ y la solución $X(t) = e^{tA} v = e^{ibt} v$ tiene norma $||X(t)|| = ||v||$ que no puede tender a cero. Por tanto, todos os valores propios tienen parte real negativa.
Recíprocamente, supongamos que todos los valores propios de A tienen parte real negativa. Toda solución es de la forma:
$$X(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t} P_j(t)$$
Cada término de esa suma tiende a cero cuando $t \to \infty$:
$$\left|\left|e^{\lambda t} P(t)\right|\right| \underset{\substack{\lambda = a+ib \\ a<0}}{=} e^{at} \left|e^{ibt}\right| ||P(t)|| = e^{at} ||P(t)|| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$
ya que $a < 0$ y la exponencial domina sobre el polinomio. Por tanto, $X(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

□

Ejemplo 53. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$$p(s) = s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 2^2 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm 2i$$
Sistema asintóticamente estable.

Ejemplo 54. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$$p(s) = s^2 + 2s - 5 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 - \sqrt{6} < 0 \\ \lambda = -1 + \sqrt{6} > 0 \end{cases}$$
Así, el sistema es inestable.

Ejemplo 55. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$p(s) = s^3 + 6s^2 = s^2(s+6) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ doble} \\ \lambda = -6 \end{cases}$$
Hay que ver si $\lambda = 0$ es semisimple. Entonces será $\underbrace{\dim E_A(\lambda)}_{=2} = \dim V_A(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{I}_n) = n - \operatorname{rango}(A - \lambda \mathbb{I}_n)$.

$$\text{rango}\,(A-0) = \text{rango}A = 1 \Rightarrow \dim V_A\,(0) = 3-1 = 2$$

Luego, efectivamente, $\lambda = 0$ es semisimple. Así, el sistema es estable, si bien no es asintóticamente estable. En este caso, el sistema se dice marginalmente estable.

Ejemplo 56. $\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$p\,(s) = s^4 + 8s^2 + 16 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i \text{ doble}$$

$$\text{rango}\,(A - 2i\mathbb{I}_n) = \text{rango} \begin{pmatrix} -2i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2i \end{pmatrix} = 3$$

$$n - \text{rango}\,(A - 2i\mathbb{I}_n) = 1$$

En consecuencia $\lambda = 2i$ no es semisimple. En consecuencia, el sistema es inestable.

8.2. Ecuaciones escalares de orden n

Una ecuación de orden n es estable, inestable, asintóticamente estable si el sistema de orden 1 equivalente es estable, inestable, asintóticamente estable, respectivamente.

Teorema 29. *Una ecuación de orden n es estable si y sólo si todas las raíces de su polinomio característico tiene parte real ≤ 0 y las que tiene parte real nula son raíces simples. Es asintóticamente estable si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa.*

Demostración. El polinomio característico de la ecuación de orden n es equivalente al polinomio característico de la matriz del sistema asociado A. Por otra parte, el polinomio mínimo coincide con el característico. ☐

Ejemplo 57. $\ddot{y} = 0$

$$p\,(s) = s^2 = 0 \Leftrightarrow s = 0 \text{ doble} \Rightarrow \text{inestable}$$

Ejemplo 58. Un muelle.

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$ms^2 + k = 0 \Leftrightarrow s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{Re}\,(\lambda) = 0 \Rightarrow \text{estable}$$

8.3. Criterio de Routh-Hurwitz

Teorema 30 (Routz-Hurwitz)**.** *Sea $p(s)$ un polinomio con coeficientes reales:*

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Todas las raíces de $p(s)$ tienen la parte real negativa si y sólo si todos los menores principales de la siguiente matriz son positivos:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \dots \qquad \Delta_n = \det H$$

Ejemplo 59. $p(s) = s^2 + \frac{k}{m} = s^2 + 0s + \frac{k}{m}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Como $\Delta_1 = 0$, alguna raíz tiene parte real 0 o positiva.

Ejemplo 60. $\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = 0$

$$p(s) = s^2 + 3s + 5$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3 > 0 \qquad \Delta_2 = 15 > 0$$

Por tanto, todas las raíces tienen parte real negativa y el sistema es estable.

8.3.1. Caso particular grado 2:

$$p(s) = s^2 + a_1 s + a_2$$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = a_1 a_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

8.3.2. Caso particular grado 3:

$$p(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0 \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_1 a_2 > 0 \end{cases}$$

8.3.3. Resultado algo más general

Teorema 31. *Si todos los menores Δ_i son no nulos, entonces el número de raíces que tienen parte real positiva es igual al número de variaciones de signos de la sucesión:*

$$1, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

8.3.4. Significado

$$\dot{X} = A(t) X + b(t)$$

$$\begin{array}{ll} X(t_0) = X_0 & \quad X(t) = R(t, t_0) X_0 + X_p(t) \\ X'(t_0) = X_0' & \quad X'(t) = R(t, t_0) X_0' + X_p(t) \end{array}$$

donde $X_p(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) b(\tau) d\tau$.

Si el sistema es asintóticamente estable, entonces $X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0, X'(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

$$X'(t) - X(t) = R(t, t_0) \left(X_0' - X_0\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

A dicho $X_p(t)$ se le llama estado estacionario.

18/12/2018 Dibujo 1

Si el sistema es estable, pero no asintóticamente estable, lo único que podemos decir es que la diferencia entre dos soluciones está acotada.

8.4. Estabilidad y transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\left(e^{tA}\right) = (s\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbb{I}_n - A)}{p_A(s)}$$

Donde los ceros del denominador (los polos) son los valores propios de A.

$$(s\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbb{I}_n - A)}{p_A(s)}$$

y tras simplificaciones, obtenemos:

$$(s\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \frac{G(s)}{P_{\text{mín}}(s)}$$

8.5. «Volumen» entre las soluciones

18/12/2018 Dibujo 2

$$V(t) = V(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds}$$

9. Métodos numéricos para problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

9.1. Método de Euler

$$x(t_1) \approx x_1 = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t_1 - t_0) = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0)$$

Esto se llama Método de Euler (progresivo). De esta forma si queremos saber el valor de la función en un T, lo que hacemos es particionar el intervalo en N partes y calcular:

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) \\ x_2 = x_1 + f(t_1, x_1)(t_2 - t_1) \\ \vdots \\ x_N = x_{N-1} + f(t_{N-1}, x_{N-1})(t_N - t_{N-1}) \end{gathered}$$

El método es de orden 1. Si cogemos la anchura de los intervalos como $h = t_i - t_{i-1}$ $\forall i = 1, \ldots, N$, si tomamos $\frac{h}{2}$ el error cometido será la mitad.

Ejemplo 61. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - 2x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ Nos piden hallar $x(5)$ con cinco subintervalos.

$$\begin{gathered} t_0 = 0, t_1 = 0{,}2, t_2 = 0{,}4, t_3 = 0{,}6, t_4 = 0{,}8, t_5 = 1 \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0{,}2f(t_0 = 0, x_0 = 1) = 1 + 0{,}2(1 + 0 - 2 \cdot 1) = 0{,}8 \\ x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 0{,}8 + 0{,}2f(t = 0{,}2, x = 0{,}8) = 0{,}8 + 0{,}2(1 + 0{,}2 - 2 + 0{,}8) = 0{,}72 \\ x_3 = x_2 + hf(t_2, x_2) = 0{,}71 \\ x_4 = x_3 + hf(t_3, x_3) = 0{,}75 \\ x_4 = x_4 + hf(t_4, x_4) = 0{,}81 \\ x(1) = x(t_5) \approx x_5 = 0{,}81 \end{gathered}$$

9.2. Métodos de Taylor

Para orden 2 tendríamos:

$$\begin{gathered} x(t_1) = x_0 + \dot{x}(t_0)(t_1 - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(t_1 - t_0)^2 \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ \ddot{x}(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))\,\dot{x}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f\right)_{(t, x(t))} \\ x_1 = x_0 + f(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f\right)_{(t_0, x_0)} (t_1 - t_0)^2 \end{gathered}$$

9.3. Otros métodos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

9.3.1. Integrando

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

Estos métodos consisten en aproximar el valor de la integral.

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\, d\tau$$

Aproximando por el valor a la izquierda:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\, d\tau \approx F(t_0)(t_1 - t_0) = f(t_0, x(t_0))(t_1 - t_0) \Leftrightarrow$$

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, x(t)) \approx x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0)$$

Esto se llama método de Euler (regresivo).

$$\int_{t_0}^{t_1} F(\tau)\, d\tau \approx \frac{1}{2}(F(t_0) + F(t_0))(t_1 - t_0)$$

$$x_1(t_1) \approx x_0 + \frac{1}{2}[F(t_0) + F(t_1)](t_1 - t_0) = x_0 + \frac{1}{2}[f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)](t_1 - t_0)$$

Este método se llama Euler (mejorado). Esto último son métodos implícitos: el valor de x_1 aparece a ambos lados, hay que resolver la ecuación.

Ejemplo 62. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - 2x \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$$x_1 = x_0 + f(t_1, x_1)(t_1 - t_0)$$

$$x_1 = x_0 + (1 + t_1 - 2x_1)(t_1 - t_0)$$

$$x_1 = \frac{1}{1 + 2(t_1 - t_0)}(x_0 + (t_1 - t_0)(1 + t_1))$$

Esta ecuación puede resolverse por el método de Newton.

9.3.2. Método de Runge-Kutta (clásica)

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$
$$k_1 = f\left(t_0, x_0\right)$$
$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$h_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$h_4 = f\left(t_0 + h, x_0 + hk_3\right)$$

10. Ecuaciones no lineales

$$\dot{x} = f\left(t, x\right)$$
$$f\left(t, x\right) = A\left(t\right)x + b\left(t\right)$$

siendo $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua.

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Solución: $x = \gamma\left(t\right)$ con $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con I un intervalo que satisface:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\left(t\right) = f\left(t, \gamma\left(t\right)\right)\ \forall t \in I$$

En los extremos de I debe interpretarse la expresión anterior como la derivada lateral.

Definición 14. La ecuación diferencial $\dot{x} = f\left(t, x\right)$ se dice autónoma si f no depende (explícitamente) de t. Análogamente se dice no autónoma si f depende explícitamente de t.

11. Ecuaciones escalares autónomas

Con $n = 1$ y f no depende de t. Es decir: $\begin{cases} \dot{x} = f\left(x\right) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$ y $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(x\right) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = f\left(x\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

Integrando en el intervalo de extremos t_0, t, donde x vale x_0 y $x\left(t\right)$, obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f\left(\chi\right)}\mathrm{d}\chi = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau = t - t_0$$

y de la ecuación anterior despejaríamos x como función de t.

Ejemplo 63. Tenemos $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1+x^2} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{1+\chi^2}} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{arcsinh}x - \text{arcsinh}x_0 = t - t_0 \Leftrightarrow \text{arcsinh}x = t - t_0 + \text{arcsinh}x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sinh\left(t - t_0 + \text{arcsinh}x_0\right)$$

Lo anterior es **una** solución del problema de valor inicial.

Podríamos hacer lo anterior con integrales indefinidas:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \mathrm{d}t \Leftrightarrow \text{arcsinh}x = t + c$$

y ahora tendríamos que ajustar las constantes. En $t = 0$, $x = x_0$, luego:

$$x_0 = \sinh\left(t_0 + c\right) \Leftrightarrow c = t_0 - \text{arcsinh}x_0$$

Ejemplo 64. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\mathrm{d}\chi}{\chi^2} = \int_0^t \mathrm{d}\tau = t \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{\chi}\right]_1^x = t \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = t \Leftrightarrow x - 1 = xt \Leftrightarrow x\left(1-t\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-t}$$

El dominio natural de $\frac{1}{1-t}$ es $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, de forma que tenemos que quedarnos con el intervalo $(-\infty, 1)$. Como vemos, el dominio donde la solución está definida es más pequeño que el que se esperaba.

Ejemplo 65. $\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{3x^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow t - t_0 = \left[\chi^{\frac{1}{3}}\right]_{x_0}^{x} = x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = x_0^{\frac{1}{3}} + t - t_0 \Leftrightarrow x = \left(x_0^{\frac{1}{3}} + t - t_0\right)^3$$

Si $x(0) = 0$, $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$ y $x = t^3$. Nótese que $x(t) = 0$ $\forall t$ también es solución de la ecuación del mismo problema de valor inicial. Nótese que la integral:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\chi}{f(\chi)}$$

es impropia en todos los puntos donde se anule f.

Definición 15. Un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ es un punto $x = p$ tal que $f(p) = 0$.

Proposición 14. *Si $x = p$ es un punto de equilibrio, entonces $x(t) = p$ (constante) es una solución de* $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = p \end{cases}$ *con dominio $\mathbb{R}$.*

Demostración. En efecto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \\ f(x(t)) = f(p) = 0 \end{aligned}\right\} \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Para estudiar lo anterior, vamos a utilizar los diagramas de fase, en los que se pinta la recta real marcando los puntos de equilibrio y el signo de f mediante una flecha.

Definición 16. Recordemos que una función f es una terna (A, B, G) donde $G \subset A \times B$ y A, B son conjuntos que cumple:

- $\forall a \in A \; \exists b \in B$ tal que $(a, b) \in G$
- Si $(a, b), (a, c) \in G$, entonces $b = c$

donde A recibe el nombre de dominio, B recibe el nombre de codominio y G es el grafo de f. Además: $(a, b) \in G \Leftrightarrow b = f(a)$.

Observación 17. Dos funciones con dominios distintos **son** funciones distintas.

Ejemplo 66. Por desarrollo en serie $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + \ldots$$

$$\dot{x} = a_1 + 2a_2 t + \cdots + k a_k t^{k-1} + \ldots$$
$$x^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 t + a_1 t^2 + \ldots$$

De la igualdad $\dot{x} = x^2$, deducimos que $a_k = 1 \; \forall k \geq 0$. Así, la solución es:

$$x(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^k = \frac{1}{1-t}$$

Lo anterior es sólo válido para $t \in (-1, 1)$.

Observación 18. Anteriormente obtuvimos la solución del ejemplo anterior mediante otro método. Nótese que las soluciones son distintas, porque los dominios lo son.

Definición 17. Cuando encontramos una solución de una ecuación diferencial y sabemos que existe otra solución con un dominio mayor que contiene al dominio de la que hemos hallado decimos que la solución es **no maximal** o que es **prolongable**.

Nótese que en el ejemplo 65, la función $x(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$ y $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ t^3 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

Proposición 15. *Sea $x = \gamma_1(t)$ solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ definida para todo $t < t_0$ y sea $x_2 = \gamma_2(t)$ otra solución definida para $t > t_0$. Entonces:*

$$x = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq t_0 \\ \gamma_2(t) & t > t_0 \end{cases}$$

es también solución de $\dot{x} = f(x)$ y $x(t_0) = x_0$.

Demostración. γ es continua en t_0:

$$\lim_{t \to t_0^-} \gamma(t) = \lim_{t \to t_0} \gamma_1(t) = \gamma_1(t_0) = x_0$$

$$\lim_{t \to t_0^+} \gamma(t) = \lim_{t \to t_0} \gamma_2(t) = \gamma_2(t_0) = x_0$$

Como ambos límites coinciden, $\gamma(t)$ es continua.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\gamma_1(t_0+h) - \gamma_1(t_0)}{h} = \dot{\gamma}_1(t_0) = f(\gamma_1(t_0)) = f(x_0)$$
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\gamma_2(t_0+h) - \gamma_2(t_0)}{h} = \dot{\gamma}_2(t_0) = f(\gamma_2(t_0)) = f(x_0)$$

Como ambas expresiones coinciden, $\gamma(t)$ es derivable. Además, $\gamma(t)$ es solución de la ecuación diferencial porque $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ lo son. Por último el valor inicial es $\gamma(t_0) = \gamma_1(t_0) = x_0$. $\square$

Proposición 16. *Sea $x = \gamma(t)$ solución de $\dot{x} = f(x)$ definida en (a,b). Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, la función $x = \gamma(t - t_0)$ es también solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ y está definida en $(a+t_0, b+t_0)$.*

Demostración. Sea $\eta(t) = \gamma(t - t_0)$. Su dominio es $(a+t_0, b+t_0)$ ya que el de γ es (a,b). Por la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t-t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-t_0) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t-t_0) = f(\gamma(t-t_0)) = f(\eta(t))$$

Ambas expresiones son iguales porque:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = f(\gamma(t)) \ \forall t$$

$\square$

Observación 19. Nótese que $\eta(t_0) = \gamma(0)$. Así que η es solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. A partir de ahora, podremos suponer, sin pérdida de generalidad, $t_0 = 0$.

Observación 20. Con esto, podemos dar aún más soluciones para el ejemplo 65:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T \\ (t-T)^3 & t > T \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} (t-T)^3 & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} (t-T_1)^3 & t \leq T_1 \\ 0 & T_1 < t \leq T_2 \\ (t-T_2)^3 & T_2 < t \end{cases}$$

Es decir, las ecuaciones no lineales escalares autónomas tienen los siguientes problemas:

- no unicidad
- prolongación de la solución

- empalme de soluciones
- restricción de soluciones
- traslación de soluciones

Observación 21. Hasta ahora, sabemos que la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ viene dado por:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(\chi)} \mathrm{d}\chi$$

Ejemplo 67. Supongamos $f(x) = x^2 - 3x + 1 = (x-2)(x-1)$. Hagamos su diagrama de fases:

$$\rightarrow 1 \leftarrow 2 \rightarrow$$

Así, si $x = \gamma(t)$ es solución, entonces:

$$f > 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = f(\gamma(t)) > 0 \Rightarrow \gamma \text{ monótona creciente}$$

$$f < 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = f(\gamma(t)) < 0 \Rightarrow \gamma \text{ monótona decreciente}$$

11.1. Existencia y unicidad

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ con $f : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con f continua en J y J un intervalo abierto.

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(\chi)} \mathrm{d}\chi$$

Teorema 32 (de existencia local)**.** *Dado $x_0 \in J$ consideramos el problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$ y $x(0) = x_0$.*

- *Si x_0 es punto de equilibrio, $f(x_0) = 0$, entonces $x = x_0$ constante es una solución del problema de valor inicial con dominio $\mathbb{R}$.*
- *Si x_0 es un punto ordinario, $f(x_0) \neq 0$, consideramos K_{x_0} el mayor intervalo que contiene a x_0 y en el que f no se anula. En ese intervalo, definimos la función $T_{x_0} : K_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula:*

$$T_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(\chi)} \mathrm{d}\chi$$

  Entonces:

  - *T_{x_0} es inyectiva y su inversa $x = \eta_{x_0}(t) = T_{x_0}^{-1}(t)$ es una solución del problema de valor inicial. Su dominio es un intervalo abierto $I_{x_0} = T_{x_0}(K_{x_0})$ y su recorrido es K_{x_0}.*
  - *(Unicidad local) Si $x = \gamma(t)$ es una solución del problema de valor inicial que toma valores en K_{x_0} y tiene dominio $I \subset \mathbb{R}$ (es decir, $\gamma(t) \in K_{x_0}$ $\forall t \in I$. Entonces $I \subseteq I_{x_0}$ y $\gamma(t) = \eta_{x_0}(t)$ $\forall t \in I$.*

Demostración.

- Si x_0 es un punto de equilibrio, $x(t) = x_0$ constante $\forall t \in \mathbb{R}$ es solución.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_0 = 0 \\ f(x(t)) = f(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \forall t \in \mathbb{R}$$

  y $x(0) = x_0$.

- Si x_0 es punto ordinario, T_{x_0} está bien definida en K_{x_0} (pues la integral es propia). Por el teorema fundamental del cálculo, T_{x_0} es continua y derivable en el intervalo abierto K_{x_0} y su derivada es $T'_{x_0}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. En K_{x_0}, f tiene signo definido, por lo que T_{x_0} es estrictamente monótona, por lo tanto, inyectiva. Sea I_{x_0} la imagen de T_{x_0}, $I_{x_0} = T_{x_0}(K_{x_0})$. I_{x_0} es un intervalo abierto, por ser T_{x_0} monótona y K_{x_0} un intervalo abierto. La restricción a la imagen $T_{x_0} : K_{x_0} \longrightarrow I_{x_0}$ es biyectiva y, en consecuencia, invertible. Sea $\eta_{x_0} = T_{x_0}^{-1}$. Veamos que es solución:

$$\frac{\mathrm{d}\eta_{x_0}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}T_{x_0}^{-1}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}T_{x_0}}{\mathrm{d}x}\left(T_{x_0}^{-1}(t)\right)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}T_{x_0}}{\mathrm{d}x}\left(\eta_{x_0}(t)\right)} = f\left(\eta_{x_0}(t)\right) \ \forall t \in T_{x_0}$$

  así que es solución de la ecuación diferencial y $\eta_{x_0}(0) = x_0$ ya que $T_{x_0}(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0} \frac{1}{f(\chi)}\mathrm{d}\chi = 0$.
  El dominio de η_{x_0} es I_{x_0}, por definición, y su recorrido es $\eta_{x_0}(I_{x_0})$ ya que $\eta_{x_0} = T_{x_0}^{-1}$ y $T_{x_0}(K_{x_0}) = I_{x_0}$.
  Vamos con la unicidad local. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ otra solución del problema de valor inicial tal que $\gamma(t) \in K_{x_0}$ $\forall t \in I$. Veamos que $T_{x_0} \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es $T_{x_0} \circ \gamma(t) = t$ $\forall t \in I$ (identidad). Dicha composición está bien definida, ya que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset K_{x_0} = \mathrm{Dom}(T_{x_0})$. Su derivada es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_{x_0} \circ \gamma)(t) = \frac{\mathrm{d}T_{x_0}}{\mathrm{d}x}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{f(\gamma(t))}f(\gamma(t)) = 1$$

  de forma que $T_{x_0} \circ \gamma(t) = t + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Evaluando en $t = 0$:

$$c = T_{x_0}(\gamma(0)) = T_{x_0}(x_0) = 0$$

  de manera que $T_{x_0} \circ \gamma(t) = t$ $\forall t$. Así, γ coincide con $\eta_{x_0} = T_{x_0}^{-1}$ en I.

$\square$

Observación 22. Nótese que la fórmula:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(\chi)}\mathrm{d}\chi$$

nos da el «tiempo» que cuesta llegar desde x_0 hasta x.

Observación 23. Para hallar el dominio I_{x_0} de η_{x_0}, recuérdese $I_{x_0} = T_{x_0}(K_{x_0})$.

- Si $f > 0$ en K_{x_0}, $K_{x_0} = (\alpha, \beta)$, $I_{x_0} = (T_{x_0}(\alpha), T_{x_0}(\beta))$. Los extremos anteriores se entienden como límites.
- Si $f < 0$ en K_{x_0}, $K_{x_0} = (\alpha, \beta)$, $I_{x_0} = (T_{x_0}(\beta), T_{x_0}(\alpha))$.

Ejemplo 68. $\dot{x} = (x - 1)(x - 3)$

$$\rightarrow 1 \leftarrow 3 \rightarrow$$

- Si $x_0 > 3$, $K_{x_0} = (3, \infty)$. η_{x_0} definida $I_{x_0} = (T_{x_0}(3), T_{x_0}(\infty))$.

$$T_{x_0}(3) = \int_{x_0}^{3} \frac{1}{(x-3)(x-1)} \mathrm{d}x = -\infty$$

$$T_{x_0}(\infty) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{(x-3)(x-1)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3}$$

$$I_{x_0} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3}\right)$$

- Si $x_0 \in (1, 3)$, entonces $K_{x_0} = (1, 3)$.

$$I_{x_0} = T_{x_0}((0, 3)) = (T_{x_0}(3), T_{x_0}(1))$$

$$T_{x_0}(3) = \int_{x_0}^{3} \frac{1}{(x-1)(x-3)} \mathrm{d}x = -\infty$$

$$T_{x_0}(1) = \int_{x_0}^{1} \frac{1}{(x-1)(x-3)} \mathrm{d}x = \infty$$

$$I_{x_0} = (-\infty, \infty)$$

- Si $x_0 \in (-\infty, 1)$, entonces, $K_{x_0} = (-\infty, 1)$:

$$I_{x_0} = (T_{x_0}(-\infty), T_{x_0}(1))$$

$$T_{x_0}(-\infty) = \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3} \right|$$

$$T_{x_0}(1) = \infty$$

$$I_{x_0} = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3} \right|, \infty \right)$$

Soluciones:

$$t = T_{x_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(\chi - 1)(\chi - 3)} \mathrm{d}\chi = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3} \right|$$

- Si $x \in (3, \infty)$:

$$t = \frac{1}{2} \ln \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3} - \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{2} \ln \frac{(x_0 - 1)(x-3)}{(x-1)(x_0 - 3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2t} = \frac{(x_0 - 1)(x-3)}{(x-1)(x_0 - 3)} \Leftrightarrow (x_0 - 1)(x-3) = (x-1)(x_0 - 3)\mathrm{e}^{2t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + \frac{2(x_0 - 3)}{(x_0 - 1)\mathrm{e}^{2t} - (x_0 - 3)} \quad \forall t \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{x_0 - 1}{x_0 - 3}\right)$$

Nótese que esta solución es maximal, porque no podemos extender la función de forma continua en un punto en el que ésta diverge.

- Si $x \in (1, 3)$:

$$x = 3 + \frac{2(x_0 - 3)}{(x_0 - 1)\mathrm{e}^{2t} - (x_0 - 3)} \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

Nótese que esta situación es maximal.

- Si $x \in (-\infty, 1)$:
$$x = 3 + \frac{2(x_0 - 3)}{(x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{2t} - (x_0 - 3)} \quad \forall t \in \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x_0 - 1}{x_0 - 3}\right|, \infty\right)$$
Nótese que esta solución es maximal, porque no podemos extender la función de forma continua en un punto en el que ésta diverge.

Teorema 33 (prolongabilidad)**.** *Sea $x_0 \in J$ un punto ordinario. La solución $\eta_{x_0} = T_{x_0}^{-1}$ del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ es prolongable si y sólo si existe un extremo p de K_{x_0} que es un punto de equilibrio y $T_{x_0}(p)$ es finito.*

Demostración.

- $\Leftarrow$) Supongamos que $f(x) > 0 \forall x \in J$, es decir, supongamos que tenemos el siguiente diagrama de fases $\to p$ con $f(p) = 0$, $T_{x_0}(p) = T \in \mathbb{R}$. Entonces:
$$x = \gamma(t) = \begin{cases} \eta_{x_0}(t) & t < T \\ p & t \geq T \end{cases}$$
es continua pues:
$$\lim_{t \to T} \eta_{x_0}(t) = p$$
al ser $T_{x_0}(p) = T$ y derivable. En consecuencia, $\gamma(t)$ es una solución con dominio mayor; ya que, si $J_{x_0} = (\alpha, T)$, entonces el dominio de $\gamma(t)$ es (α, ∞).

- $\Rightarrow$) Si η_{x_0} es prolongable por la derecha:
$$\eta_{x_0} : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}, \gamma : (\alpha, \beta + \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$
con $\epsilon > 0$ y $\beta = T_{x_0}(p)$. Entonces:
$$\beta < \beta + \epsilon \Rightarrow \beta \text{ es real (finito)}$$
es decir, $\beta = T_{x_0}(p) \in \mathbb{R}$.

□

Ejemplo 69. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. $x = 0$ es un punto de equilibrio.

- Tomemos $x_0 \in (0, \infty)$. $I_{x_0} = (T_{x_0}(0), T_{x_0}(\infty))$
$$T_{x_0}(\infty) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x = \infty$$
$$T_{x_0}\left(0^+\right) = -\sqrt[3]{x_0}$$
$$I_{x_0} = (-\sqrt[3]{x_0}, \infty)$$

- Si $x_0 \in (-\infty, 0)$:
$$I_{x_0} = (T_{x_0}(-\infty), T_{x_0}(0)) = (-\infty, -\sqrt[3]{x_0})$$

$$x_0 \in (0, \infty) \Rightarrow T_{x_0}(0) = -\sqrt[3]{x_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{prolongable}$$
$$x_0 \in (-\infty, 0) \Rightarrow T_{x_0}(0) = -\sqrt[3]{x_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{prolongable}$$

Teorema 34 (Unicidad de la solución de equilibrio)**.** *Sea $p \in J$ un cero aislado de f. Consideramos las integrales impropias:*

$$\int^p \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \qquad \int_p \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$$

La solución de equilibrio es única si y sólo si ambas integrales son divergentes.

Demostración. Supongamos que alguna de ellas es convergente. Para fijar ideas $\rightarrow p$ y $\int^p \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ converge. Tomo x_0 a la izquierda de p tal que no haya ningún otro cero de f entre x_0 y p. La solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ es $\eta_{x_0} : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si denoto $I_{x_0}(\alpha, T)$ con $T = T_{x_0}(p) = \int_{x_0}^p \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ (finito). Entonces:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \eta_{x_0}(t+T) & t \in (\alpha - T, 0) \\ p & t \geq 0 \end{cases}$$

es solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$. η_{x_0} es solución; $x = p$ contante, también es solución y en $t = 0$ es continua:

$$\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = \lim_{t \to 0^+} p = p$$

$$\lim_{t \to 0^-} \gamma(t) = \lim_{t \to 0^-} \eta_{x_0}(t+T) = \eta_{x_0}(T) = p$$

ya que $T_{x_0}(p) = T$. Por tanto, la solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$ no es única.

Recíprocamente, supongamos que la solución de equilibrio no es única. Si ambas integrales son divergentes, llegamos a una contradicción. Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una solución distinta de la de equilibrio; entonces $\gamma(t) \neq p$ para algún t. Tomo t_0 cercano a 0 y tal que $\gamma(t_0) = x_0 \neq p$. El tiempo que cuesta llegar de x_0 a p (a través de η_{x_0}) es t_0 y, por otro lado, tenemos:

$$t_0 = \int_{x_0}^p \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$$

que es divergente por hipótesis. □

Ejemplo 70. $\dot{x} = (x-1)(x-3)$. Estudiemos las integrales:

$$\int^1 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x \qquad \int_1 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x$$

$$\int^3 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x \qquad \int_3 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x$$

Todas estas integrales divergen.

Ejemplo 71. $\dot{x} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$

$$\rightarrow 0 \leftarrow$$

$$-\frac{2}{3}\int^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \qquad -\frac{2}{3}\int_0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$$

Proposición 17. *Sea p un cero aislado de f. Si f tiene derivada lateral finita por la derecha en p, entonces:*

$$\int_p \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$$

diverge. Lo mismo por la izquierda y $\int^p \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$.

Demostración.

$$f'\left(p^+\right) = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(p)}^{=0}}{x - p} = m \in \mathbb{R}$$

Entonces, por definición del límite, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x - p < \delta$ entonces:

$$m - \epsilon < \frac{f(x)}{x - p} < m + \epsilon$$

- Si $f(x) > 0$ a la derecha de p:

  $$\frac{m - \epsilon}{f(x)} < \frac{1}{x - p} < \frac{m + \epsilon}{f(x)}$$

  La integral de la expresión central diverge:

  $$\int_p \frac{1}{x - p}$$

  diverge. Luego el término de la derecha también divergirá:

  $$(m + \epsilon) \int_p \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$$

  diverge.

- Análogo si f es negativa.

□

Corolario 2. *Si f es derivable (o al menos tiene derivadas laterales finitas en todos los puntos de equilibrio), entonces $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ tiene solución única cualquiera que sea $x_0 \in J$. En particular, las soluciones que «están» entre dos puntos de equilibrio tienen dominio $(-\infty, \infty)$.*

Ejemplo 72. Consideremos la función $\dot{x} = |x|$. $f'\left(0^+\right) = 1$ y $f'\left(0^-\right) = -1$. En este caso, la solución sería única. $\dot{x} = \sqrt{x}$ no es derivable en 0 y, además, no tiene solución única.

Ejemplo 73. Tenemos un vaso cilíndrico de radio R relleno de líquido hasta una altura y. En el lateral del cilindro, a una altura h de la base hemos colocado un orificio circular de radio r. Sea v la velocidad a la que sale el agua por dicho orificio. Por la física, conocemos:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\pi r^2 v$$

$$V = \pi R^2 y$$

$$v = \sqrt{2g(y - h)}$$

$$\pi R^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\pi r^2 \sqrt{2g\left(y-h\right)}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2y}\right]\sqrt{y-h} = -\alpha\sqrt{y-h} \quad y > h$$

Así, llegamos a:

$$\dot{y} = \overset{h \leftarrow}{\begin{cases} -\alpha\sqrt{y-h} & y > h \\ 0 & y \leq h \end{cases}}$$

Si estudiamos la integral:

$$\int^h \frac{1}{\sqrt{y-h}}\mathrm{d}y$$

converge. Esto nos plantea el siguiente problema: la solución de equilibrio no es única. Tenemos varias soluciones $y = h$, o cualquier solución que acabe en el punto de equilibrio. Es decir, el sistema es determinista hacia el futuro, pero si mi sistema está actualmente en la posición de equilibrio, no sé cuando se ha vaciado el vaso o si se ha vaciado siquiera.

12. Ecuaciones escalares no autónomas

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(t, x\right) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

Ejemplo 74. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = tx^2$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = t\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\chi}{\chi^2} = \int_{t_0}^{t} \tau\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{\chi}\right]_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)x_0}{x_0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{x_0}{1 - \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)x_0}$$

En general, las soluciones van a venir dadas de forma implícita.

12.1. Ecuaciones separables

$$\dot{x} = g\left(t\right)h\left(x\right)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g\left(t\right)h\left(x\right) \Leftrightarrow g\left(t\right)h\left(x\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{h\left(x\right)} = g\left(t\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{h\left(x\right)} = \int g\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Así, obtenemos una solución implícita.

Observemos la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}x}{h\left(x\right)} = g\left(t\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{h\left(x\right)}\mathrm{d}x - g\left(t\right)\mathrm{d}t = 0$$

Y podemos expresar el término izquierdo como la diferencial de una función F:

$$\mathrm{d}F\left(t, x\right) = \frac{\partial F}{\partial t}\left(t, x\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x}\left(t, x\right)\mathrm{d}x = 0$$

12.1.1. Ecuaciones exactas

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$\mathrm{d}x - f(t,x)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow P(t,x)\,\mathrm{d}x \underbrace{-P(t,x)\,f(t,x)}_{=Q(t,x)}\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$$

Esto se llama «una» forma diferencial de la ecuación diferencial.

Definición 18. Si existe una función $F(t,x)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = P(t,x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = Q(t,x)$$

entonces se dice que la ecuación diferencial es **exacta**. La función F se denomina función potencial.

Teorema 35. *Supongamos que $P(t,x)$ y $Q(t,x)$ son funciones de clase C^1 en un abierto en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ y supongamos que la ecuación diferencial $P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$ es exacta, con función potencial F. Una función $x = \gamma(t)$, con $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervalo, es solución de la ecuación diferencial si y sólo si $F(t,\gamma(t)) = cte\,\forall t \in I$. Si $(t_0,x_0) \in \mathcal{D}$ es un punto tal que $P(t_0,x_0) \neq 0$, entonces el problema de valor inicial $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}t = 0$, $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución (local) que se obtiene al despejar x en función de t de la ecuación $F(t,x) = F(t_0,x_0)$.*

Demostración. Si $x = \gamma(t)$ es solución de la ecuación diferencial, es decir:

$$P(t,\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t + Q(t,\gamma(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t,\gamma(t)) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}(t,\gamma(t))}_{=Q(t,\gamma(t))} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(t,\gamma(t))}_{=P(t,\gamma(t))}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$

donde la última igualdad se cumple por la expresión anterior. De forma que $F(t,\gamma(t))$ es constante $\forall t \in I$ (dominio de γ).

Recíprocamente, sea $x = \gamma(t)$ una función tal que $F(t,\gamma(t))$ es constante:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t,\gamma(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,\gamma(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) =$$

$$= Q(x,\gamma(t)) + P(x,\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)$$

Es decir, γ es una solución de la ecuación diferencial.

Supongamos $(t_0,x_0) \in \mathcal{D}$ y $P(t_0,x_0) \neq 0$. Consideremos la ecuación:

$$G(t,x) := F(t,x) - F(t_0,x_0) = 0$$

De la ecuación anterior conocemos la solución (t_0,x_0); por el teorema de la función implícita, existe una única solución local $x = \gamma(t)$ con $x_0 = \gamma(t_0)$ definida en un intervalo en torno a x_0 y con imagen en un intervalo abierto en torno a t_0 en el cual la función es derivable siempre que:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t_0,x_0) \neq 0$$

$$0 \neq \frac{\partial G}{\partial x}(t_0, x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = P(t_0, x_0)$$

Por el resultado de la primera parte ($F(t, \gamma(t)) = \text{cte} \Rightarrow \gamma$ solución) se tiene que γ es solución de la ecuación diferencial y $\gamma(t_0) = x_0$ por construcción. $\square$

Ejemplo 75.

$$\dot{x} = -\frac{x}{t+x}$$

$$(t+x)\,\dot{x} + x = 0$$

$$(t+x)\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t + x \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = x$$

$$F(t,x) = \frac{x^2}{2} + tx = c$$

Esto es la solución implícita. Hallemos la explícita:

$$x = -t \pm \sqrt{t^2 + c'}$$

Si además $x(0) = 1$:

$$1 = x(0) = \pm\sqrt{c} \Leftrightarrow c = 1$$

$$x = -1 + \sqrt{t^2 + 1}$$

Si ahora $t = 0$ y $x = 1$:

$$\frac{1}{2} + 0 = c \Leftrightarrow x^2 + 2tx - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

En este caso, hay que volver a reajustar:

$$1 = x(0) = 0 \pm \sqrt{1} \Rightarrow \text{la raíz positiva}$$

Si $x(1) = -1$:

$$-1 = x(1) = -1 \pm \sqrt{1 + c}$$

$$\sqrt{1+c} = 0 \Leftrightarrow c = -1$$

En este caso es $P(1, -1) = 0$.

$$x = -t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

no es solución del problema de valor inicial pues no es derivable en $t = 1$.

12.2. Caracterización de exactas

Teorema 36. *Sean $P(t,x)$ y $Q(t,x)$ continuas en el intervalo $[a,b]\times[c,d]$ y de clase C^1 en $(a,b)\times(c,d)$. Entonces la ecuación diferencial $P(t,x)\,dx+Q(t,x)\,dt=0$ es exacta si y sólo si:*

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial Q}{\partial x}(t,x)\ \ \forall (t,x)\in(a,b)\times(c,d)$$

La función potencial F puede hallarse por medio de:

$$F(t,x)=\int_a^t Q(\tau,c)\,d\tau+\int_c^x P(t,\chi)\,d\chi$$

Demostración. Supongamos que $P(t,x)\,dx+Q(t,x)\,dt=0$ es exacta: $\exists F$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=Q \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=P$$

Como P,Q son de clase C^1, se tiene que F es C^2, de manera que, por el teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}(t,x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)=\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Recíprocamente, supongamos que:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Defino:

$$F_1(t,x):=\int_c^x P(t,\chi)\,\mathrm{d}\chi$$

Así:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x)=P(t,x)$$

y $F_1(t,c)=0$. Veamos que la diferencia entre Q y $\dfrac{\partial F_1}{\partial t}$ sólo depende de t.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q-\frac{\partial F_1}{\partial t}\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial t\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}=0$$

el último paso es por hipótesis. Sea:

$$A(t):=Q(t,x)-\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x)$$

y definimos:

$$\phi(t)=\int_a^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_a^t\left[Q(\tau,x)-\frac{\partial F_1}{\partial t}(\tau,x)\right]\mathrm{d}\tau$$

Entonces $F(t,x)=F_1(t,x)+\phi(t)$ es una función potencial:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x)=P(t,x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) + Q(t,x) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = Q(t,x)$$

Explícitamente:

$$F(t,x) = F_1(t,x) + \phi(t) = \int_c^x P(t,\chi)\,\mathrm{d}\chi + \int_a^t \left[Q(\tau,x) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(\tau,x)\right]\mathrm{d}\tau$$

donde la integrando de la segunda integral únicamente depende de t. En consecuencia, puedo tomar $x = c$.

$$F(t,x) = \int_c^x P(t,\chi)\,\mathrm{d}\chi + \int_a^t \left[Q(\tau,c) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(\tau,c)\right]\mathrm{d}\tau$$

Ahora, tenemos que ver que el segundo sumando del núcleo de la segunda integral se anula. Recordemos:

$$F_1(t,c) = 0\ \forall t \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,c) = 0$$

En consecuencia, obtenemos:

$$F(t,x) = \int_c^x P(t,\chi)\,\mathrm{d}\chi + \int_a^t Q(\tau,c)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

Ejemplo 76. $\left(t^2+x\right)dx + 2tx\mathrm{d}t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2+x\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2tx) = 2t$$

Luego la ecuación es exacta:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^2 + x$$

$$F(t,x) = \int \left(t^2+x\right)\mathrm{d}x + \phi(t) = t^2x + \frac{x^2}{2} + \phi(t)$$

$$2tx = \frac{\partial F}{\partial t} = 2tx + 0 + \phi'(t) \Leftrightarrow \phi'(t) = 0 \Leftrightarrow \phi(t) = C$$

Así:

$$F(t,x) = \frac{1}{2}x^2 + t^2x + C$$

En realidad, esto puede hacerse a ojo:

$$\left(t^2+1\right)\mathrm{d}x + 2tx\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + t^2\mathrm{d}x + 2tx\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \mathrm{d}\left(t^2x\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2 + t^2x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + t^2x = C$$

En vez de integrar la P, podemos integrar primero la x:

$$F(t,x) = \int 2tx\mathrm{d}t = xt^2 + \phi(x)$$

$$t^2 + x = \frac{\partial F}{\partial x} = t^2 + \phi'(x) \Leftrightarrow \phi'(x) = x \Leftrightarrow \phi(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t,x) = xt^2 + \frac{1}{2}xt^2 + C$$

Observación 24. Recordemos que una ecuación diferencial no es exacta, su forma lo es. Es decir, dependiendo de cuál sea P, puede ser que la forma que obtengamos sea exacta o no.

Ejemplo 77. $\dot{x} = -\frac{2x}{t}$
Multiplicando por t:

$$t\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}t = 0$$
$$1 = \frac{\partial}{\partial t}(t) \neq \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

Sin embargo, si multiplicamos por t^2:

$$2t = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2tx) = 2t$$

Así:

$$\mathrm{d}\left(t^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow t^2 x = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{t^2}$$

12.3. Factores integrantes

Definición 19. Dada una ecuación diferencial $P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$ una función $\mu(t,x) \neq 0$ tal que $\mu(t,x)\,P(t,x)\,\mathrm{d}x + \mu(t,x)\,Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$ es exacta, se llama un **factor integrante** para la ecuación diferencial $P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$. O, alternativamente si y solo si:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu P)$$

entonces es exacta.

Proposición 18 (Ecuación del factor integrante). *El factor integrante μ cumple la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial t} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}$$

Demostración.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}P + \mu\frac{\partial P}{\partial t} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right) = P\frac{\partial \mu}{\partial t} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$
$$\frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial t} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}$$

□

En la práctica, se buscan factores integrantes con dependencia «sencilla» e (t,x). Por ejemplo, busco factores integrantes que sólo depende x: $\mu(t,x) = \phi(x)$. En este caso, la ecuación en derivadas parciales se convierte en una ecuación diferencial ordinaria que, además, es lineal.

$$\frac{1}{\phi(x)}\left(0 - Q(t,x)\,\phi'(x)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

donde el primer término depende sólo de x. Si el segundo término sólo depende x, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal para ϕ, que debemos resolver.

Ejemplo 78. $\left(2tx^2 - x^3\right) dt + \left(1 - t^2 x\right) \mathrm{d}x = 0$

$$4tx - 3x^2 \neq -2tx$$

Consideremos $\mu(t, x) = \phi(x)$:

$$\phi(x)\left(2tx^2 - x^3\right) \mathrm{d}t + \phi(x)\left(1 - t^2 x\right) \mathrm{d}x = 0$$

Buscamos que se cumpla:

$$\phi'(x)\left(2tx^2 - x^3\right) + \phi(x)\left(4tx - 3x^2\right) = \phi(x)(-2tx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \phi'(x) = -\frac{3}{x}\phi(x)$$

La solución de dicha ecuación diferencial es $\phi(x) = x^{-3}$.

$$\frac{2tx^2 - x^3}{x^3}\mathrm{d}t + \frac{1 - t^2 x}{x^3}\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2t}{x} - 1\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{x^3} - \frac{t^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}\left(-t - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2t}{x}\mathrm{d}t - \frac{t^2}{x^2}dx = \mathrm{d}\left(-t - \frac{1}{2x^2} + \frac{t^2}{x}\right) \Leftrightarrow F(t, x) = \frac{t^2}{x} - \frac{1}{2x^2} - t$$

Alternativamente, buscamos un factor integrante que sólo depende t:

$$\phi(t) P(t, x)\,\mathrm{d}x + \phi(t) Q(t, x)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\phi'(t) P(t, x) + \phi\frac{\partial P}{\partial t} = \phi(t)\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

El término izquierdo sólo depende de t. Si el término derecho sólo depende de t, obtenemos una ecuación diferencial lineal para ϕ.

Ejemplo 79. $x\mathrm{d}t + \left(t^2 x - t\right) \mathrm{d}x = 0$

Buscamos un factor integrante que sólo dependa de x.

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{2(tx - 1)}{x}$$

Luego, no me sirve. Probemos uno que sólo dependa de t.

$$\phi(t)\, x\mathrm{d}t + \phi(t)\left(t^2 x - t\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\phi(t) = \phi'(t)\left(t^2 x - t\right) + \phi(t)(2tx - 1)$$

$$-2(tx - 1)\phi(t) = \phi'(t)\, t(tx - 1) \Leftrightarrow \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{-2}{t} \Leftrightarrow \phi'(t) = \frac{-2}{t}\phi(t)$$

Si no conseguimos encontrar un factor integrante que dependa únicamente de t o de x , se busca un factor integrante que sea función de la suma, resta, producto, ... de las variables.

$$\mu(t,x)=\phi(t+x)\Rightarrow z=t+x$$

$$\mu(t,x)=\phi(t-x)\rightarrow z=t-x$$

$$\mu(t,x)=\phi(tx)\Rightarrow z=tx$$

$$\mu(t,x)=\phi\left(\frac{x}{t}\right)\Rightarrow z=\frac{x}{t}$$

Es decir, en general estamos buscando $\mu(t,x)=\phi(z(t,x))$. Donde ϕ es desconocida y z es conocida (la imponemos nosotros).

$$\phi(z)\,P\mathrm{d}x+\phi(z)\,Q\mathrm{d}t=0$$

Para que la ecuación anterior sea exacta, tiene que cumplirse:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(z)\,P)=\frac{\partial}{\partial x}(\phi(z)\,Q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\phi'(z)\,\frac{\partial z}{\partial t}P+\phi(z)\,\frac{\partial P}{\partial t}=\phi'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}Q+\phi(z)\,\frac{\partial Q}{\partial x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}}{P\frac{\partial z}{\partial t}-Q\frac{\partial z}{\partial x}}$$

Si la parte de la derecha depende únicamente de z, entonces hallamos ϕ y ya hemos encontrado el factor integrante.

Ejemplo 80. Tenemos la ecuación diferencial:

$$t^2(2\sin tx+tx\cos tx)\,\mathrm{d}x+tx(3\sin tx+tx\cos tx)\,\mathrm{d}t=0$$

Buscamos un $\mu(t,x)=\phi(tx)=\phi(z)$ con $z=tx$.

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}=\frac{1}{tQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{tx}=\frac{1}{z}$$

Así, hay que resolver:

$$\phi'(z)=\frac{1}{z}\phi(z)\Rightarrow\phi(z)=z\Rightarrow\mu(t,x)=\phi(tx)=tx$$

$$t^3x(2\sin tx+tx\cos tx)\,\mathrm{d}x+t^2x^2(3\sin tx+tx\cos tx)\,\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\left(t^3x^2\sin(tx)\right)=0\Leftrightarrow t^3x^2\sin(tx)=c$$

En un entorno de un punto (t_0,x_0) tal que $P(t_0,x_0)\neq 0$ siempre existe un factor integrante.

12.3.1. Ecuaciones lineales

$$\dot{x} = \alpha(t) + \beta(t)$$

Por ejemplo, imaginemos:

$$A(t)\,\mathrm{d}x + (B(t)\,x + C(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

Esa ecuación es lineal. Escrita en forma «normal», tenemos:

$$\dot{x} = -\frac{B(t)}{A(t)}x - \frac{C(t)}{A(t)}$$

El mejor método para resolverlas es el método que vimos en el cuatrimestre pasado. Si no, siempre se puede buscar un factor integrante que dependa sólo de t.

$$\phi(t) = \frac{1}{A(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s}$$

12.3.2. Ecuaciones separables

$$\dot{x} = g(t)\,h(x)$$

$$\mathrm{d}x = g(t)\,h(x)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{h(x)}\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t$$

En este caso, el factor integrante es:

$$\mu(t,x) = \frac{1}{h(x)}$$

En lo anterior están incluidas las autónomas.

12.3.3. Ecuaciones homogéneas

$$\frac{1}{t^2+x^2}(x\mathrm{d}t - t\mathrm{d}x) = 0$$

En ese caso me estaría quitando el origen $(0,0)$. Por tanto, habría que resolver y estudiar el $(0,0)$.

$$(x+t)\,\mathrm{d}t + \left(x^2+tx\right)\mathrm{d}x = 0$$

Habría que estudiar la recta $x+t=0$ por separado.

También es posible que añadamos una solución extra:

$$\mathrm{d}t + x\mathrm{d}x = 0$$

Multiplicando por $t+x$, tenemos:

$$(t+x)\,\mathrm{d}t + x\,(t+x)\,\mathrm{d}x = 0$$

donde claramente $t+x=0$ es solución, pues la acabamos de meter a mano.

12.3.4. Funciones homogéneas

La función siguiente es homogénea de grado 2:

$$f(t,x) = 3tx + x^2$$

pues:

$$f(\lambda t, \lambda x) = 3\lambda t\lambda x + (\lambda x)^2 = \lambda^2 \left(3t + x^2\right) = \lambda^2 f(t,x)$$

Definición 20. Una función $f(t,x)$ es homogénea de grado $p \in \mathbb{R}$ si:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^p f(t,x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall (t,x) \in \mathcal{D}(f)$$

Ejemplo 81. $f(t,x) = t^2 + 2x^2$ es homogénea de grado 2.
$f(t,x) = \sqrt[3]{(t^9 + 4x^9)}$ es homogénea de grado 3.

$$f(\lambda t, \lambda x) = \sqrt[3]{(\lambda t)^9 + 4(\lambda x)^9} = \sqrt[3]{\lambda^9 (t^9 + 4x^9)} = \lambda^3 \sqrt[3]{(t^9 + 4x^9)} = \lambda^3 f(t,x)$$

Ahora, estudiemos:

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 t^2}} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{t^2 + x^2}} = \lambda^{-1} f(t,x)$$

que es homogénea de grado -1. En este caso, esto es cierto sólo para $\lambda > 0$. Ahora, veamos:

$$f(t,x) = \frac{x^2 + tx}{\sqrt{x^2 + t^2}}$$

es homogénea de grado 1. Éstas no son diferenciables en $(0,0)$ en la mayoría de los casos.

Nótese que si tenemos una función homogénea de grado 0, a menos que sea constante, no será continua en el origen, pues el límite direccional es distinto.

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^0 f(t,x)$$

Definición 21. Una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ es homogénea si f es una función homogénea de grado 0.

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x)$$

Una ecuación diferencial $P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$ es homogénea si P y Q son funciones homogéneas del mismo grado.

Observación 25. Si f es homogénea de grado 0:

$$f(t,x) = \left(t \cdot 1, t\frac{x}{t}\right) = f\left(1, \frac{x}{t}\right)$$

De esta forma, hacemos un cambio de variable $u = \frac{x}{t}$ y resulta:

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{f(t,x)}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{f(t,tu)}{t} - \frac{tu}{t^2} = \frac{1}{t} f(t,tu) - \frac{u}{t} = \frac{f(1,u) - u}{t}$$

Así, obtenemos una ecuación de variables separadas:

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(1,u) - u} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Igualmente, podríamos haber hecho el cambio $u = \frac{t}{x}$ y resulta otra ecuación de variables separadas.

Ejemplo 82.

$$\dot{x} = \frac{x^2 + t^2}{tx}$$

La función anterior es homogénea de grado 0.

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow \dot{u} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{x^2 + t^2}{t^2 x} - \frac{tu}{t^2} = \frac{t^2u^2 + t^2}{t^3 u} - \frac{tu}{t^2} =$$

$$= \frac{u^2 + 1}{tu} - \frac{u}{t} = \frac{u^2 + 1 - u^2}{tu} = \frac{1}{tu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{tu} \Leftrightarrow u\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|t| + c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{x^2}{t^2} - \ln|t| + c = 0$$

En forma diferencial $P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$, con P y Q homogéneas de grado p. Hacemos el cambio variable $u = \frac{x}{t} \Leftrightarrow x = tu$.

$$P(t,tu)(t\mathrm{d}u + u\mathrm{d}t) + Q(t,tu)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tP(t,tu)\,\mathrm{d}u + [uP(t,tu) + Q(t,tu)]\,\mathrm{d}t = 0$$

Como P y Q son homogéneas de grado p, tenemos:

$$tt^pP(1,u)\,\mathrm{d}u + t^p[uP(1,u) + Q(1,u)]\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{P(1,u)}{Q(1,u) + P(1,u)}\mathrm{d}u + \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 0$$

que ya es una ecuación de variables separadas.

Ejemplo 83.

$$\dot{x} = \frac{x^2 + t^2}{tx} \Leftrightarrow tx\mathrm{d}x - \left(x^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = 0$$

Tomando $x = tu$.

$$tx(u\mathrm{d}t + tu) - \left(x^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = 0$$

$$ttu(u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u) - \left(t^2u^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u) - \left(u^2 + 1\right)\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u^2 - u^2 - 1\right)\mathrm{d}t + tu\mathrm{d}u = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{d}t}{t} + u\mathrm{d}u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u^2 - \ln|t| = c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{x^2}{t^2} - \ln|t| = c$$

Observación 26. Se puede ver que si $P(t,x)\,\mathrm{d}x + Q(t,x)\,\mathrm{d}t = 0$ es homogénea, entonces:

$$\mu(t,x) = \frac{1}{xP(t,x) + tQ(t,x)}$$

es un factor integrante.

Nótese que si:

$$xP(t,x) + tQ(t,x) = 0$$

entonces:

$$\dot{x} = -\frac{Q}{P} = \frac{\frac{x}{t}P}{P} = \frac{x}{t}$$

y la ecuación es lineal.

12.4. Trucos y recetas

Hay millones.

$$(3t - x + 5)\,\mathrm{d}x - (x + t - 1)\,\mathrm{d}t = 0$$

Si hallamos la intersección de las rectas $3t - x + 5 = 0$ y $x + t - 1 = 0$, obtenemos que el punto de corte $(-1, 2)$. Así, usando el cambio de variable $w = t + 1 \Leftrightarrow t = w - 1$ y $v = x - 2 \Leftrightarrow x = v + 2$.

$$(3w - 3 - v - 2 + 5)\,\mathrm{d}v - (v + 2 + w - 1 - 1)\,\mathrm{d}w = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3w - v)\,\mathrm{d}v - (v + w)\,\mathrm{d}w = 0$$

que es una ecuación homogénea.

Ejemplo 84 (La catenaria)**.** Posicionamos nuestro origen en el punto más bajo de la cuerda. Llamamos ρ a la densidad del cable. Así $m = \rho L(x)$. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\rho L(x)\, g = T \sin\theta$$

$$T_0 = T\cos\theta$$

Dividimos ambas ecuaciones, obteniendo:

$$\frac{\rho L(x)\, g}{T_0} L(x) = \tan\theta = y'(x)$$

Por curvas, sabemos que:

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(s)^2}\mathrm{d}s$$

$$y'(x) = \frac{\rho g}{T_0}\int_0^x \sqrt{1 + y'(s)^2}\mathrm{d}s$$

Derivando, obtenemos:

$$y''(x) = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Usando el cambio de variable $p = y'$, obtenemos:

$$p' = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + p^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dp = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + p^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\rho g}{T_0}\mathrm{d}x \Leftrightarrow p = \sinh\left(\frac{\rho g}{T_0}x\right) + c$$

Como $x = 0 \Leftrightarrow p = 0$, obtenemos $c = 0$. Así:

$$y(x) = \int \sinh\left(\frac{\rho g}{T_0}x\right)\mathrm{d}x = \frac{T_0}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{T_0}x\right) + c$$

Con las condiciones iniciales $x = 0$ y $y = y_0$:

$$y(x) = y_0 + \frac{T_0}{\rho g}\left[\cosh\left(\frac{\rho g}{T_0}x\right) - 1\right]$$

13. Existencia y unicidad

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Es decir:

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

donde $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. La solución es una función:

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

con I intervalo que cumple:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Supondremos que f es continua en $\mathcal{D}$ y que $\mathcal{D}$es abierto y conexo. Notemos:

$$(t, \gamma(t)) \in \mathcal{D} \quad \forall t \in I$$

13.1. Forma integral del problema de Cauchy

Proposición 19. *Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, tal que $(t, \gamma(t)) \in \mathcal{D}$ $\forall t \in I$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *γ es derivable y es solución del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2. *γ es continua y satisface:*

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau \quad \forall t \in I$$

Demostración.

- 1) $\Rightarrow$ 2)

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I, \quad \gamma(t_0) = x_0$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma(t) - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

  Además, γ es continua por ser derivable.

- 2) $\Rightarrow$ 1) Si $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau$ y γ es continua, entonces γ es derivable, ya que:

  $$\tau \longrightarrow f(\tau, \gamma(\tau))$$

  es continua por ser composición de funciones continuas, por lo que:

  $$\int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

  es derivable y así:

  $$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau = \gamma(t)$$

  es derivable, por el teorema fundamental del cálculo integral. La derivada de γ es:

  $$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right) = f(t, \gamma(t))$$

  De forma que γ es solución de la ecuación diferencial. Además en $t = t_0$, tenemos:

  $$\gamma(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau = x_0$$

La propiedad 2 recibe el nombre forma integral del problema de Cauchy. □

13.2. Iteración de Picard

Tomamos $\gamma_0(t) = x_0$ constante. Ahora:

$$\gamma_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_0(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

$$\gamma_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_1(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

Tenemos que ver:

$$\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(\tau, \gamma_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, \lim_{n\to\infty} \gamma_n(\tau)\right) \mathrm{d}\tau =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

Ejemplo 85.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_0(t) = 1$$

$$\gamma_1(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, \gamma_0(\tau))\, \mathrm{d}\tau = 1 + \int_0^t 1^2 d\tau = 1 + t$$

$$\gamma_2(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, \gamma_1(\tau))\, \mathrm{d}\tau = 1 + \int_0^t (1+\tau)^2\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

$$\gamma_3(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, \gamma_2(\tau))\, \mathrm{d}\tau = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^2\right)^2 \mathrm{d}\tau =$$

$$= 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^9 + \frac{1}{63}t^7$$

Puede verse:

$$\gamma_n(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + t^{n+1}p(t)$$

donde $p(t)$ es un polinomio. Suponiendo que todo va bien, debe ser:

$$\gamma(t) = \lim_n \gamma_n(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots = \frac{1}{1-t} \quad \forall |t| < 1$$

Ejemplo 86.

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ \dot{X}(0) = X_0 \end{cases}$$

Aplicamos el método anterior:

$$\gamma_0(t) = X_0$$

$$\gamma_1(t) = X_0 + \int_0^t A\gamma_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = X_0 + tAX_0$$

$$\gamma_2(t) = X_0 + \int_0^t A\gamma_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau = X_0 + \int_0^t A(X_0 + \tau AX_0)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= X_0 + tAX_0 + A^2X_0 \int_0^t \tau \mathrm{d}\tau = X_0 + tAX_0 + \frac{1}{2}t^2A^2X_0$$

$$\gamma_3(t) = X_0 + \int_0^t A\gamma_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau = X_0 + \int_0^t A\left(X_0 + \tau AX_0 + \frac{\tau^2}{2}A^2X_0\right) \mathrm{d}\tau =$$

$$= X_0 + tAX_0 + \frac{1}{2}t^2A^2X_0 + \frac{t^3}{3!}A^3X_0$$

$$\gamma_n(t) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}A^k\right) X_0$$

$$\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = e^{tA}X_0$$

13.3. Funciones de Lipschitz

Definición 22. Diremos que $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz en $\mathcal{D}$ si existe $L > 0$ tal que:

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L\,||y - x|| \quad \forall (t,x), (t,y) \in \mathcal{D}$$

Diremos que f satisface la condición de Lipschitz local en $\mathcal{D}$ si para cada punto $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe un entorno $U \subset \mathcal{D}$ de (t_0, x_0) y una constante L tal que:

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L\,||y - x|| \quad \forall (t,x), (t,y) \in U$$

Ejemplo 87.

1. Funciones lineales: $f(t,x) =$ "$A(t)\,X$" satisfacen Lipschitz local si $A(t)$ es continua. Y si, además, $||A(t)||$ está acotada para todo t en el dominio de A, entonces satisface Lipschitz global. Veámoslo:

$$||A(t)\,Y - A(t)\,X|| = ||A(t)\,(Y - X)|| \leq n\,||A(t)||\,||Y - X||$$

   En $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ sea $L := n \max ||A(t)||$. Así:

$$||A(t)\,Y - A(t)\,X|| \leq L\,||Y - X||$$

   Si $||A(t)||$ está acotada:

$$L = n \max_{t \in \mathrm{Dom}(A)} ||A(t)||$$

2. Si f es C^1, entonces satisface la condición de Lipschitz local:

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq \sup_{\xi} ||D_x f(\xi)||\,||y - x||$$

3. $f(x) = |x|$ satisface la condición de Lipschitz.

$$\frac{|y| - |x|}{|y - x|} \leq 1$$

4. $f(x) = x^s$ con $s \in (0,1)$ no satisface Lipschitz local en 0.

$$\frac{|y^s - x^s|}{|y - x|}$$

   En $x = 0$, tenemos:

$$\frac{|y^s|}{|y|} = \frac{1}{|y|^{1-s}}$$

   que no está acotado cuando $y \to 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \longleftrightarrow \gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = x_0 \\ \gamma_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_k(\tau))\,\mathrm{d}\tau \end{cases}$$

Lo anterior es la llamada Interación de Picard. Para probar lo anterior necesitamos la condición de Lipschitz.

Teorema 37. *Una función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz local en $\mathcal{D}$ si y sólo si para cada conjunto compacto $K \subset \mathcal{D}$ la función f satisface la condición del Lipschitz global en K. Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ ser compacto es equivalente a ser cerrado y acotado.*

Proposición 20. *Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua en el abierto $\mathcal{D}$. Sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. Existen $\delta > 0$ y $\rho > 0$ tales que las funciones γ_k definidas por iteración de Picard están bien definidas en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y toman valores en la bola cerrada $\overline{B}(x_0, \rho)$.*

$$\gamma_k : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow \overline{B}(x_0, \rho)$$

Demostración. Tomamos un intervalo $J = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ y una bola cerrada $B = \overline{B}(x_0, \rho)$ tales que $J \times B \subset \mathcal{D}$. Como $J \times B$ es compacto, puedo llamar:

$$M = \max_{(t,x) \in J \times B} ||f(t,x)||$$

Sea:

$$\delta := \min\left(\epsilon, \frac{\rho}{M}\right)$$

Entonces, vamos a demostrar por inducción que $\gamma_k : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow B \ \forall k$.

- $k = 0$. $\gamma_0(t) = x_0$. $\mathrm{Dom}(\gamma_0) \subset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $\mathrm{Im}(\gamma_0) = \{x_0\} \subset B$
- Supongamos que se cumple para k. $\gamma_k : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow B$. Veamos que γ_{k+1} está bien definida.

  $$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow (t, \gamma_k(t)) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B$$

  Es decir, $(t, \gamma_{k+1}) \in \mathcal{D} \ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Así γ_{k+1} está bien definida. Además, toma valores en B:

  $$||\gamma_{k+1}(t) - x_0|| = \left|\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_k(\tau))\, d\tau\right|\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} ||f(\tau, \gamma_k(\tau))||\, d\tau\right| \leq$$

  $$\leq \left|\int_0^t M d\tau\right| = M\,|t - t_0| \leq M \cdot \delta \leq M\frac{\rho}{M} = \rho$$

  Es decir, $\gamma_{k+1}(t) \in \overline{B}(x_0, \rho) \ \ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Antes de enunciar el teorema de existencia y unicidad, tenemos que estudiar la continuidad del límite de una sucesión de funciones. Tenemos una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ continuas en su dominio. ¿Es la función límite

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(t)$$

continua? La respuesta es que, en general, no. Veamos un ejemplo, sea $\varphi_k(t) = t^k \quad \forall k \geq 0$ con $t \in [0, 1]$.

$$\varphi_k(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(t) = \lim_{k \to \infty} t^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$$

Para que se cumpla que el límite de la sucesión sea continua, hace falta exigir convergencia uniforme. $\square$

Lema 2 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sea $\gamma_k : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $k \geq 0$ con γ_k continua. Si existe $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que:*

$$||\varphi_{k+1}(x) - \varphi(x)|| \leq M_k$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ es convergente y la función límite es continua $\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x)$. Además:

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 = \int_a^b \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1$$

Teorema 38 (de existencia y unicidad de soluciones de un problema de valor inicial)**.** *Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua en $\mathcal{D}$ abierto y conexo y que satisface la condición de Lipschitz local. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, que contiene a t_0 en su interior, tal que el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en J. (Única quiere decir que cualquier otra solución coincide con ella en la intersección de sus dominios).

Demostración. Tenemos:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = x_0 \\ \gamma_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \gamma_k(\tau))\, d\tau \end{cases}$$

que está bien definida en $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $\gamma_k(t) \in B = \overline{B}(x_0, \rho)$. Además, hemos visto que:

$$M = \max_{(t,x) \in J \times B} \{||f(x,t)||\}, \quad \rho \geq M\delta$$

Como $J \times B$ es compacto, $J \times B \subset \mathcal{D}$ y f satisface la condición de Lipschitz local, entonces f satisface la condición global en $J \times B$. En otras palabras, existe $L > 0$ tal que:

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L\, ||y - x|| \quad \forall x, y \in B$$

Ahora, vamos a demostrar los siguientes apartados:

1. La sucesión $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$ es convergente y converge a una función continua.
   Probaremos por inducción que:

$$||\gamma_k(t) - \gamma_{k-1}(t)|| \leq M \frac{L^{k-1}}{k!} |t - t_0|^k \quad \forall k \geq 1, \forall t \in I$$

   Para $k = 1$, tenemos:

$$||\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|| = \left|\left| x_0 + \int_{t_0}^t f\left(\tau, \underbrace{\gamma_0(\tau)}_{=x_0}\right) d\tau - x_0 \right|\right| =$$

$$= \left|\left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0)\, d\tau \right|\right| \leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, x_0)||\, d\tau \leq \int_{t_0}^t M d\tau = M\, |t - t_0|$$

   Supuesto cierto para k, veamos que se cumple para $k+1$.

$$||\gamma_{k+1}(t) - \gamma_k(t)|| = \left|\left| x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \gamma_k(\tau))\, d\tau - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \gamma_{k-1}(\tau))\, d\tau \right|\right| =$$

$$= \left|\left| \int_{t_0}^t [f(\tau, \gamma_k(\tau)) - f(\tau, \gamma_{k-1}(\tau))]\, d\tau \right|\right| \leq \int_{t_0}^t ||f(\tau, \gamma_k(\tau)) - f(\tau, \gamma_{k-1}(\tau))||\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^t L\, ||\gamma_k(\tau) - \gamma_{k-1}(\tau)||\, d\tau$$

   Por hipótesis de inducción, obtenemos:

$$||\gamma_{k+1}(t) - \gamma_k(t)|| \leq \int_{t_0}^t LM \frac{L^{k-1}}{k!} (\tau - t_0)^k\, d\tau = M \frac{L^k}{k!} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^k\, d\tau =$$

$$= M\frac{L^k}{k!}\frac{(t-t_0)^{k+1}}{k+1} = M\frac{L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}$$

Ahora, como $|t-t_0| < \delta$, tenemos que:

$$||\gamma_k(t) - \gamma_{k-1}(t)|| \leq M\frac{L^{k-1}}{k!}|t-t_0|^k \leq M\frac{L^{k-1}}{k!}\delta^k$$

A continuación, debemos probar que la suma de las constantes con las que estamos acotando son finitas para que se cumplan las hipótesis del criterio M de Weierstrass. Peor esto resulta trivial, pues es la serie de Taylor de la exponencial:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\frac{L^{k-1}}{k!}g^k = \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k\delta^k}{k!} = \frac{M}{L}\left(e^{L\delta}-1\right)$$

Así, por el criterio M de Weierstrass, tenemos que:

$$\gamma(t) = \lim_{k\to\infty}\gamma_k(t)$$

existe y γ es una función continua en J.

2. La función $\gamma(t)$ es solución del problema de valor inicial. Probaremos que es solución de la ecuación integral equivalente. Tenemos que llegar a que:

$$\gamma(t) = \lim_{k\to\infty}\gamma_{k+1}(t) = \lim_{k\to\infty}\left(x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau,\gamma_k(\tau))\,d\tau\right) = x_0 + \lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^t f(\tau,\gamma_k(\tau))\,d\tau \overset{*}{=}$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{k\to\infty} f(\tau,\gamma_k(\tau))\,d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t f\left(\tau, \lim_{k\to\infty}\gamma_k(\tau)\right)d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau,\gamma(\tau))\,d\tau$$

donde los últimos pasos se deben a que γ es continua. Probemos ahora el paso $*$ (que el límite y la integral se pueden intercambiar). Esto se debe a que el integrando satisface las condiciones del criterio M de Weierstrass. Veamos esto último:

$$||f(t,\gamma_{k+1}(t)) - f(t,\gamma_k(t))|| \leq L\,||\gamma_{k+1}(t) - \gamma_k(t)|| \leq LM\frac{L^k}{(k+1)!}\delta^{k+1} = \frac{L^{k+1}\delta^{k+1}}{(k+1)!}$$

y la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\frac{L^k\delta^k}{k!}$$

es convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\frac{L^k\delta^k}{k!} = M\left(e^{L\delta}-1\right)$$

3. La solución es única
Si $\eta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es otra solución, entonces:

$$\eta(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau,\eta(\tau))\,d\tau$$

Como γ también la satisface:

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau,\gamma(\tau))\,d\tau$$

Restando, tenemos:

$$u(t) := ||\eta(t) - \gamma(t)|| = \left|\left|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, \eta(t)) - f(\tau, \gamma(\tau))]\, d\tau\right|\right| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} ||f(\tau, \eta(t)) - f(\tau, \gamma(t))||\, d\tau$$

Y, por la condición de Lipschitz:

$$||\eta(t) - \gamma(t)|| \leq \int_{t_0}^{t} ||\eta(\tau) - \gamma(\tau)||\, d\tau$$

Obteniendo:

$$u(t) \leq L \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau = 0 + L \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

Ahora, podemos aplicar la desigualdad de Grönwall, obteniendo que:

$$u(t) \leq 0 e^{L \int_{t_0}^{t} 1 d\tau} \leq 0$$

Pero, como debe ser $u(t) \geq 0$ por definición, será:

$$\gamma(t) = \eta(t)$$

□

Teorema 39 (de Peano)**.** *Si $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, entonces el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución.

Ejemplo 88.

$$\dot{x} = 1 + 3(t - x)^{\frac{2}{3}}$$

Nótese que $f(1, x) = 1 + 3(t - x)^{\frac{2}{3}}$ es continua, todo problema de valor inicial tiene soluciones por el teorema de Peano. Estudiemos:

$$\frac{f(t, y) - f(t, x)}{y - x} = \frac{1 + 3(t - y)^{\frac{2}{3}} - 1 - 3(t - x)^{\frac{2}{3}}}{y - x} = 3\frac{(t - y)^{\frac{2}{3}} - (t - x)^{\frac{3}{2}}}{y - x}$$

Lo anterior no está acotado cerca de $x = t$.

$$\frac{f(t, y) - f(t, t)}{y - t} = 3\frac{(t - y)^{\frac{2}{3}}}{y - t} = \frac{3}{(y - t)^{\frac{1}{3}}}$$

que no está acotado cuando $y \to t$.

Así $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 \neq t_0$, hay solución única. Con $(t_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ (no se puede asegurar que sea única).

Recordemos que tenemos un resultado que nos dice una función es de Lipschitz si y sólo si las derivadas parciales con respecto a las x son continuas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2(t - x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{(t - x)^{\frac{1}{3}}}$$

que no está definida en $t = x$.

De hecho, este problema de valor inicial en $x(0) = 0$ no tiene solución única. Tanto $x(t) = t$ como $x(t) = t + t^3$ son soluciones.

13.4. Solución maximal

Una solución de $x = \gamma(t)$ de:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

es maximal si cualquier solución coincide con la restricción de γ al dominio de ésta.

Lema 3 (Separación de soluciones)**.** *Sean $\gamma_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones de $\dot{x} = f(t,x)$ con $t_0 \in J_1 \cap J_2$. Supongamos que f satisface la condición de Lipschitz en un conjunto que contiene los grafos de ambas, y sea L la constante de Lipschitz en dicho conjunto. Entonces:*

$$||\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|| \leq ||\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0)||\, e^{L|t-t_0|} \quad \forall t \in J_1 \cap J_2$$

Demostración. Sabemos que γ_1 y γ_2 satisfacen:

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_1(\tau))\, d\tau$$

$$\gamma_2(t) = \gamma_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \gamma_2(\tau))\, d\tau$$

$$\begin{aligned} ||\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|| &= \left|\left|\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} [f(\tau,\gamma_2(\tau)) - f(\tau,\gamma_1(\tau))]\, d\tau\right|\right| \leq \\ &\leq ||\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0)|| + \left|\left|\int_{t_0}^{t} [f(\tau,\gamma_2(\tau)) - f(\tau,\gamma_1(\tau))]\, d\tau\right|\right| \leq \\ &\leq ||\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0)|| + \left|\int_{t_0}^{t} ||f(\tau,\gamma_2(\tau)) - f(\tau,\gamma_1(\tau))||\, d\tau\right| \leq \\ &\leq ||\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0)|| + \left|\int_{t_0}^{t} L\, ||\gamma_2(\tau) - \gamma_1(\tau)||\, d\tau\right| \end{aligned}$$

Ahora, llamemos:

$$u(t) := ||\gamma_2(t) - \gamma_1(t)||$$

Así, se satisface:

$$u(t) \leq u(t_0) + \left|\int_{t_0}^{t} L u(\tau)\, d\tau\right|$$

En consecuencia, por la desigualdad de Grönwall, tenemos:

$$||\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|| \leq ||\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0)||\, e^{L|t-t_0|}$$

□

Corolario 3. *Si $\gamma_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con soluciones de:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Entonces, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ $\forall t \in J_1 \cap J_2$.

Demostración. Tomando $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ en el lema anterior se llega al resultado. □

Lema 4. *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si I no es abierto, entonces existe un intervalo abierto $\tilde{I}$ que contiene a I y una solución $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ del mismo problema de valor inicial tal que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\ \forall t \in I$.

Demostración. Recordemos que el dominio $\mathcal{D}$ de f es abierto. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $I = (\alpha, \beta]$. Sabemos que $\gamma : (\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es solución del problema de valor inicial, $(t, \gamma(t)) \in \mathcal{D}$. En particular, $(\beta, \gamma(\beta)) \in \mathcal{D}$. Sea $x_1 = \gamma(\beta)$ y considero el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(\beta) = x_1 \end{cases}$$

El teorema de existencia y unicidad asegura que existe una única solución:

$$\eta : [\beta - \delta, \beta + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Entonces:

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma(t) & t \in (\alpha, \beta] \\ \eta(t) & t \in (\beta, \beta + \delta) \end{cases}$$

es solución del problema de valor inicial, coincide con γ en $(\alpha, \beta]$ y su dominio $\tilde{I} = (\alpha, \beta + \delta)$ contiene a I. □

Teorema 40 (Solución maximal)**.** *Sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ abierto con $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y que satisface la condición de Lipschitz local. Existe un único intervalo abierto $J_{t_0,x_0} \subset \mathbb{R}$ que contiene a t_0 y una única función $\gamma_{t_0,x_0} : J_{t_0,x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface:*

1. *$x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ es solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$.*
2. *Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con I intervalo, es una solución de $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$, entonces $I \subset J_{t_0,x_0} \wedge \gamma(t) = \gamma_{t_0,x_0}(t)\ \forall t \in I$.*

Demostración. Consideramos el conjunto de todas las soluciones de $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ definidas en un intervalo abierto (pues sabemos que si es cerrado, podemos extenderlo a un abierto). Sea J_{t_0,x_0} la unión de todos estos intervalos. Entonces J_{t_0,x_0} es un intervalo abierto (abierto por ser unión de abiertos) (intervalo porque todos contienen a t_0).

En J_{t_0,x_0} defino la función $\gamma_{t_0,x_0} : J_{t_0,x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: dado $t \in J_{t_0,x_0}$ tomo una solución γ cuyo dominio contenga a t y defino $\gamma_{t_0,x_0}(t) = \gamma(t)$. La función γ_{t_0,x_0} está bien definida (no depende de la elección de γ ya que todas coinciden en su dominio común y t está en él).

Además, γ_{t_0,x_0} es solución de la ecuación diferencial ya que $\dot{\gamma}_{t_0,x_0}(t) = \dot{\gamma}(t)$ cualquiera que sea la solución γ que elija y $f(t, \gamma_{t_0,x_0}(t)) = f(t, \gamma(t))$.

Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ otra solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Si I no es abierto, considero $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como en el lema anterior. Así, puedo suponer, sin pérdida de generalidad que I es abierto. Entonces $I \subset J_{t_0,x_0}$ ya que I está contenido en la unión J_{t_0,x_0}. Además, hemos visto que en la intersección de sus dominios $\gamma(t) = \gamma_{t_0,x_0}(t)\ \forall t \in I \cap I_{t_0,x_0} = I$. □

13.5. Resumen

$$f \text{ continua} \Rightarrow \exists \text{solución}$$

$$f \text{ satisface Lipschitz local} \Rightarrow \exists ! \text{solución}$$

$$\exists ! \gamma_{t_0,x_0} : J_{t_0,x_0} (\text{abierta}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{solución única}$$

La solución γ_{t_0,x_0} se llama solución maximal del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Cualquier otra solución distinta de ésta se dice que es prolongable. En particular, es prolongable a la derecha (izquierda) si se puede extender el dominio a la derecha (izquierda).

$$J_{t_0,x_0} = \left(\tau^-_{t_0,x_0}, \tau^+_{t_0,x_0}\right)$$

donde $\tau^{\pm}_{t_0,x_0}$ se denominan tiempos de vida futura y pasada de la solución maximal.

Teorema 41. *Sea* $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. *Sea* $t_1 \in J_{t_0,x_0}$ *y denotamos por* x_1 *el punto* $x_1 = \gamma_{t_0,x_0}(t_1)$. *Entonces,* $\gamma_{t_0 x_0} = \gamma_{t_1,x_1}$ *y* $J_{t_0,x_0} = J_{t_1,x_1}$.

Demostración. Dado $t_1 \in J_{t_0,x_0}$ y $x_1 = \gamma_{t_0,x_0}(t_1)$, considero el problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$. Tengo dos soluciones: $\gamma_{t_1,x_1} : J_{t_1,x_1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la solución maximal, y $\gamma_{t_0,x_0} : J_{t_0,x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ya que es solución y $\gamma_{t_0,x_0}(t_1 = x_1)$.

Ambas soluciones coinciden en su dominio común $\gamma_{t_0,x_0}(t) = \gamma_{t_1,x_1}(t) \ \ \forall t \in J_{t_0,x_0} \cap J_{t_1,x_1}$. Como J_{t_1,x_1} es el maximal, tenemos $J_{t_0,x_0} \subseteq J_{t_1,x_1}$. Si fuera $J_{t_0,x_0} \neq J_{t_1,x_1}$ podría empalmar ambas soluciones obteniendo una solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ con dominio mayor que J_{t_0,x_0} y esto es absurdo. $\square$

Teorema 42. *Sea* K *un conjunto compacto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *contenido en el dominio de* f, $K \subset \mathcal{D}$. *Sea* $(t_0, x_0) \in K$. *Existen dos tiempos* $t_1, t_2 \in J_{t_0,x_0}$ *tales que* $t_1 < t_0 < t_2$ *y* $(t_1, \gamma_{t_0,x_0}(t_1))$ *y* $(t_2, \gamma_{t_0,x_0}(t_0))$ *están fuera de* K*:*

$$(t_1, \gamma_{t_0,x_0}(t_1)), (t_2, \gamma_{t_0,x_0}(t_2)) \in \mathcal{D} \backslash K$$

Demostración. Probaremos la existencia de t_2 (análogo para t_1).

$$J_{t_0,x_0} = \left(\tau^-_{t_0,x_0}, \tau^+_{t_0,x_0}\right)$$

- Si $\tau^+_{t_0,x_0} = \infty$, entonces sea $T = \max\{t | (t,x) \in K\}$. Tomo $t_2 > T$ y, evidentemente, $(t_2, \gamma(t_2)) \notin K$ ya que $t_2 > \max\{t | (t,x) \in K\}$.

- Si $\tau^+_{t_0,x_0} = \beta < \infty$. Hagamos esto por reducción al absurdo; supongamos que existe un compacto $K \subset \mathcal{D}$ con $(t_0, x_0) \in K$ y $(t, \gamma_{t_0,x_0}(t)) \in K \ \forall t \in [t_0, \beta]$. Sea $M = \max\{||f(t,x)|| \text{ t.q. } (t,x) \in K\}$; así es $||f(t,x)|| \leq M \ \forall (t,x) \in K$. Para t, τ cercanos a β:

$$||\gamma_{t_0,x_0}(t) - \gamma_{t_0,x_0}(\tau)|| = \left|\left| \int_\tau^t f(s, \gamma_{t_0,x_0}(s))\, ds \right|\right| \leq \left| \int_\tau^t ||f(s, \gamma_{t_0,x_0}(s))||\, ds \right| \leq$$

$$\leq M \left| \int_\tau^t ds \right| = M |t - \tau|$$

Por el criterio de Cauchy, existe el límite $\lim\limits_{t \to \beta} \gamma_{t_0,x_0}(t) = \xi$. Además, $(\beta, \xi) \in K$ ya que $(t, \gamma_{t_0,x_0}(t)) \in K$ y K es cerrado. En consecuencia, $(\beta, \xi) \in \mathcal{D}$ y puedo plantear el problema de valor inicial

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\beta) = \xi \end{cases}$ que, por el teorema de existencia y unicidad tiene solución en un intervalo de la forma $(\beta - \delta, \beta + \delta)$. Esto contradice la maximimalidad de J_{t_0,x_0} ya que obtengo (empalmando) una solución definida para tiempos mayores que $\beta = \tau^+_{t_0,x_0}$, lo cual es absurdo.

$\square$

Ejemplo 89.

$$\begin{cases} \dot{x} = -t^2 (x+y) \\ \dot{y} = -t^2 (x+y) \end{cases}$$

Nótese que $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Consideremos la función $D(t) = x(t)^2 + y(t)^2$.

$$\dot{D}(t) = 2x(t)\dot{x} + 2y(t)\dot{y}(t) = -2t^2 (x(x+y) + y(x-y)) =$$

$$= -2t^2 \left(x^2 + y^2\right) = -2t^2 D(t)$$

Y la ecuación diferencial anterior es fácil de resolver:

$$D(t) = D(t_0)\, e^{-\frac{2}{3}(t-t_0)^3}$$

De aquí se deduce que $\tau^+_{t_0,(x_0,y_0)} = \infty$ y $\tau^-_{t_0,(x_0,y_0)} = -\infty$ $\forall (t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$. Si el $\tau^+_{t_0,(x_0,y_0)} = \beta$ finito, entonces:

$$D(t) = \left(x_0^2 + y_0^2\right) e^{-\frac{2}{3}(t-t_0)^3} < D(t) = \left(x_0^2 + y_0^2\right) e^{-\frac{2}{3}(\beta-t_0)^3}$$

de donde $(x(t), y(t)) \in \overline{B}\left((0,0), \left(x_0^2 + y_0^2\right) e^{-\frac{1}{3}(\beta-t_0)^3}\right)$. Así $(t, (x(t), y(t))) \in [t_0, \beta] \times \overline{B}\left((0,0), \left(x_0^2 + y_0^2\right) e^{-\frac{1}{3}(\beta-t_0)^3}\right)$ que es compacto. Por tanto $\tau^+_{t_0,x_0}$ no puede ser finito.

13.6. Dominios cilíndricos y soluciones globales

Un dominio cilíndrico o banda es un dominio de la forma $(a,b) \times \mathcal{U}$ con $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

Teorema 43. *Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervalo y $f : (a,b) \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaciendo la condición de Lipschitz local. Sean $t_0 \in (a,b)$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ y γ_{t_0,x_0} la solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Entonces:*

1. *Si existe un conjunto $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tal que $\gamma_{t_0,x_0}(t) \in \mathcal{K}$ $\forall t \in [t_0, \tau^+_{t_0,x_0})$, entonces $\tau^+_{t_0,x_0} = b$.*

2. *Si existe un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tal que $\gamma_{t_0,x_0}(t) \in \mathcal{K}$ $\forall t \in (\tau^-_{t_0,x_0}, t_0]$, entonces $\tau^-_{t_0,x_0} = a$.*

3. *Si existe un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tal que $\gamma_{t_0,x_0}(t) \in \mathcal{K}$ $\forall t \in J_{t_0,x_0}$, entonces $J_{t_0,x_0} = (a,b)$.*

4. *Si $\tau^+_{t_0,x_0} < b$, entonces para todo compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ existe $t \in [t_0, \tau^+_{t_0,x_0})$ tal que $\gamma_{t_0,x_0}(t) \notin \mathcal{K}$.*

5. *Si $\tau^-_{t_0,x_0} > a$, entonces, para todo compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ existe $t \in (\tau^-_{t_0,x_0}, t_0]$ tal que $\gamma_{t_0,x_0}(t) \notin \mathcal{K}$.*

Demostración.

1. Usaremos reducción al absurdo. Existe $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ tal que $\gamma_{t_0,x_0}(t) \in \mathcal{K}$ $\forall t \in [t_0, \tau^+_{t_0,x_0})$ y supongamos que $\tau^+_{t_0,x_0} < b$. Sea $T \in \left(\tau^+_{t_0,x_0}, b\right)$ cualquiera y considero $K = [t_0, T] \times \mathcal{K}$, que es compacto. Pero entonces $(t, \gamma_{t_0,x_0}(t)) \subset [t_0, T] \times \mathcal{K}$ $\forall t \in [t_0, \tau^+_{t_0,x_0})$ que contradice el teorema anterior (grafo se sale de todo compacto).

2. Similar a 1.

3. Consecuencia de 1 y 2.

4. Contrarecíproco de 1.

5. Contrarecíproco de 2.

$\square$

Ejemplo 90.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{tx^2}{1+t^2+x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Existe solución única, porque $\dot{x}$ es C^1.

$$0 \leq \frac{x^2}{1+t^2+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(t,x) \leq t$$

$$|x(t) - x_0| = \left| \int_0^t \frac{\tau x(\tau)^2}{1+\tau^2+x(\tau)^2} d\tau \right| \leq \int_0^t |\tau| \frac{x(\tau)^2}{1+\tau^2+x(\tau)^2} d\tau \leq \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2}t^2$$

Así, tenemos:

$$\tau^+_{t_0,x_0} = \infty$$

Si fuese $\tau^+_{t_0,x_0} = T$ finito, entonces $t \in [0,T]$ y $|x(t) - x_0| \leq \frac{1}{2}t^2 \leq \frac{1}{2}T^2$; o, lo que es lo mismo, $x(t) \in \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{2}T^2\right)$.

$$(t, x(t)) \in [0,T] \times \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{2}T^2\right) \quad \forall t \in \left[0, T = \tau^+_{t_0,x_0}\right]$$

Lo cual es absurdo.

Por un razonamiento similar, obtenemos que $\tau^-_{t_0,x_0} = -\infty$.

La solución implícita de la ecuación diferencial anterior es:

$$4E_i\left(\frac{2}{x}\right) + e^{\frac{2}{x}}\left(2x - 1 - t^2\right) = c$$

donde:

$$E_i(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^s}{s} ds$$

13.6.1. Caso particular $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$

Entonces es $\mathcal{D} = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 91. $\dot{X} = A(t)X$ con $X = (x_1, \ldots, x_n)$

$$f(t,X) = A(t)X$$

con $A(t) \in I$ continua.

$$||f(t,Y) - f(t,X)|| = ||A(t)Y - A(t)X|| = ||A(t)(Y-X)|| \leq n\,||A(t)||\,||Y - X||$$

Dado (t_0, x_0) tomo el subintervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con $\delta > 0$ cualquiera y defino:

$$L = \max_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} n\,||A(t)||$$

y así:

$$||f(t,Y) - f(t,X)|| \leq L\,||Y - X|| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}$$

Por lo que existe solución única.

Llamo $I = [a,b] \vee [a,b) \vee (a,b] \vee (a,b)$. Probaremos que $\tau_{t_0,x_0}^{+} = b$. Si fuese $\tau_{t_0,x_0}^{+} < b$, tomo $T \in \left(\tau_{t_0,x_0}^{+}, b\right)$ y, entonces:

$$||X(t) - X_0|| = \left|\left|\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,X(\tau)\,d\tau\right|\right| \leq \int_{t_0}^{t} ||A(\tau)\,X(\tau)||\,d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} n\,||A(\tau)||\,||X(\tau)||\,d\tau \leq L\int_{t_0}^{t} ||X(t)||\,d\tau$$

donde:

$$L = \max_{t\in[t_0,T]} n\,||A(t)||$$

Ahora:

$$||X(t)|| = \left|\left|X_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,X(\tau)\,d\tau\right|\right| \leq ||X_0|| + \left|\left|\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,X(\tau)\,d\tau\right|\right| \leq$$

$$\leq ||X_0|| + L\int_{t_0}^{t} ||X(t)||\,d\tau$$

Y, ahora, aplicando la desigualdad de Gronwall, obtenemos que:

$$||X(t)|| \leq ||X_0||\,e^{L(t-t_0)}$$

Así, $t \in [t_0, T] \Rightarrow ||X(t)|| \leq ||X_0||\,e^{L(t-t_0)} \leq ||X_0||\,e^{LT}$, luego:

$$(t, X(t)) \in [t_0, T] \times \overline{B}\left(0, ||X_0||\,e^{LT}\right)$$

que contradice el teorema.

Por tanto, toda solución de $\dot{X} = A(t)\,X$ es única y está definida en todo I.

Definición 23. Si $\mathcal{D} = (a,b) \times \mathcal{U}$ se dice que la solución es global si $J_{t_0,x_0} = (a,b)$ para todo $t_0 \in (a,b)$ y todo $x_0 \in \mathcal{U}$.

Teorema 44. *$f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y satisface Lipschitz local. Entonces toda solución de un problema de valor inicial $\dot{x} = f(t,x)$ tiene dominio $J_{t_0,x_0} = (a,b)$ si se satisface alguna de las siguientes propiedades:*

1. *f está acotada en $(a,b) \times \mathbb{R}^n$; es decir, existe $M \geq 0$ tal que:*

$$||f(t,x)|| \leq M \quad \forall t \in (a,b) \wedge \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2. *f satisface la condición de Lipschitz global en $(a,b) \times \mathbb{R}^n$; es decir, existe $L \geq 0$ tal que:*

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq L\,||y - x|| \quad \forall t \in (a,b) \wedge \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3. *Existen funciones continuas $\alpha, \beta : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha(t) > 0$ tales que:*

$$||f(t,y) - f(t,x)|| \leq \alpha(t)\,||y - x|| + \beta(t)$$

4. *f es sublineal: existen funciones continuas $\alpha, \beta : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha(t) \geq 0\ \forall t \in (a,b)$ tales que:*

$$||f(t,x)|| \leq \alpha(t)\,||x|| + \beta(t) \quad \forall t \in (a,b) \wedge \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración.

1. $\dot{x} = f(t, x)$ y $x(t) = x_0$.

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$||x(t) - x_0|| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(\tau, x(\tau))||\, d\tau \leq M\,|t - t_0|$$

Si fuera $\tau^+_{t_0,x_0} < b$, tomo $T \in \left(\tau^+_{t_0,x_0}, b\right)$ y en $[t_0, T]$ tengo $||x(t) - x_0|| \leq M(t - t_0)$ de forma que:

$$(t, x(t)) \in [t_0, T] \times B(x_0, M(T - t_0))$$

Lo cual es absurdo. Así, $\tau^+_{t_0,x_0} = b$. Análogo para tiempos menores que t_0.

4.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$||x(t)|| \leq ||x_0|| + \left|\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right|\right| \leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} ||f(\tau, x(\tau))||\, d\tau \leq$$

$$\leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} (\alpha(\tau)\, ||x(\tau)|| + \beta(\tau))\, d\tau =$$

$$= \left(||x_0|| + \int_{t_0}^{t} \beta(\tau)\, d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, ||x(\tau)||\, d\tau$$

Si fuese $\tau^+_{t_0,x_0} < b$ tomo $T \in \left(\tau^+_{t_0,x_0}, b\right)$ y en $[t_0, T]$, $\int_{t_0}^{t} \beta(\tau)\, d\tau$ alcanza su valor máximo. Sea:

$$c = \max_{[t_0,T]} \left(||x_0|| + \int_{t_0}^{t} \beta(\tau)\, d\tau\right)$$

Así:

$$||x(t)|| \leq c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)\, ||x(\tau)||\, d\tau$$

Por la desigualdad de Grönwall, obtenemos:

$$||x(t)|| \leq c e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau) d\tau}$$

de forma que:

$$(t, x(t)) \in [t_0, T] \times \overline{B}(0, R)$$

con $R = c e^{\int_{t_0}^{T} \alpha(\tau) d\tau}$, lo cual es absurdo. Así $\tau^+_{t_0,x_0} = b$. Análogamente para $t \leq t_0$.

□

Ejemplo 92.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \sin\left(t^2 x\right) \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Nótese que el dominio es $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$|f(t, x)| = \left|x \sin\left(t^2 x\right)\right| \leq |x|$$

Es sublineal tomando $\alpha(t) = 1$ y $\beta(t) = 1$. Así el dominio es $J_{0,3} = \mathbb{R}$.

13.7. Ecuaciones de orden n

Se transforman a sistema y, en silencio, se piensa.

Ejemplo 93 (péndulo)**.**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

Con lo visto en el último teorema, vemos fácilmente que la solución es siempre global. Ahora, consideremos que hemos medido $\theta(t_0) = \theta_0$ y $v(t_0) = v_0$. Como son medidas experimentales, tienen cierta imprecisión. ¿Cómo afecta esto a nuestra solución? Así, en general consideraremos:

$$x = \mathfrak{F}(t, t_0, x_0, \mu) = \psi(t, t_0, x_0)$$

donde con μ denotamos los parámetros de los que depende nuestro sistema físico.

Por ejemplo, consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Sabemos que la solución viene dada por:

$$X(t) = R(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)b(\tau)\,d\tau = \psi(t, t_0, X_0)$$

Ejemplo 94.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La solución es:

$$x = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$$

$$J_{t_0,x_0} = \begin{cases} \left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right) & \text{si} \quad x_0 > 0 \\ (-\infty, \infty) & \text{si} \quad x_0 = 0 \\ \left(t_0 + \frac{1}{x_0}, \infty\right) & \text{si} \quad x_0 < 0 \end{cases}$$

Así:

$$\psi(t, t_0, x_0) = \frac{x_0}{1 + (t - t_0)x_0}$$

con $(t, t_0, x_0) \in \Theta = \left\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^3 | t \in J_{t_0,x_0}\right\}$.

14. Dependencia regular de datos iniciales y parámetros

$\dot{x} = f(t, x)$ con $f : \mathcal{D} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y Lipschitz local en $\mathcal{D}$.

Definición 24. Se llama solución general maximal de la ecuación diferencial a la función $\psi : \Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\psi(t, t_0, x_0) = \gamma_{t_0,x_0}(t)$$

donde:

$$\Theta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n | (t_0, x_0) \in \mathcal{D} \wedge t \in J_{t_0,x_0}\}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{t_0,x_0}}{\mathrm{d}t}(t) = f(t,\gamma_{t_0,x_0}(t)), \gamma_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,t_0,x_0) = f(t,\psi(t,t_0,x_0)) \\ \psi(t,t_0,x_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\gamma_{t_0,x_0}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\gamma_{t_0,x_0}(\tau))\,d\tau$$

$$\psi(t,t_0,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\psi(\tau,t_0,x_0))\,d\tau$$

Separación de soluciones:

$$||\gamma_{t_0,x_1}(t) - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| \leq ||x_1 - x_0||\, e^{L|t-t_0|}$$

$$||\psi(t,t_0,x_1) - \psi(t,t_0,x_0)|| \leq ||x_1 - x_0||\, e^{L|t-t_0|}$$

$$J_{t_1,x_1} = J_{t_0,x_0}$$

$$\gamma_{t_0,x_0}(t) = \gamma_{t_1,x_1}(t)$$

$$x_1 = \gamma_{t_0,x_0}(t_1)$$

$$x_1 = \psi(t_1,t_0,x_0)$$

$$\psi(t,t_0,x_0) = \psi(t,t_1,x_1)$$

$$\psi(t,t_0,x_0) = \psi(t,t_1,\psi(t_1,t_0,x_0))\,\forall t \in J_{t_0,x_0}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,t_0,x_0) = f(t,\psi(t,t_0,x_0))$$

$$\psi(t_0,t_0,x_0) = x_0$$

$$||\psi(t,t_0,x_1) - \psi(t,t_0,x_0)|| \leq e^{|t-t_0|}\,||x_1 - x_0||$$

Teorema 45 (dependencia continua respecto a datos iniciales)**.** *Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ abierto y $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y satisface la condición de Lipschitz local. Entonces:*

1. *Si $[a,b] \subset J_{t_0,x_0}$ existe un entorno $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ de (t_0,x_0) tal que $[a,b] \subset J_{s,y}$ para todo $(s,y) \in \mathcal{N}$.*

2. *El dominio de la solución general maximal es abierto.*

3. *La solución general maximal ψ es una función continua en Θ.*

Demostración.

1. Sea $(t_0,x_0) \in \mathcal{D}$ y $[a,b] \subset J_{t_0,x_0}$. Tenemos la solución maximal $\gamma_{t_0,x_0}(t) = \psi(t,t_0,x_0)$. Defino $T_0 \subset \mathcal{D}$ y tomo $\rho_0 > 0$ tal que $||\gamma_{t_0,x_0}(t) - x|| \leq \rho_0$ para todo $(t,x) \in T_0$.

$$T_0 = \{(t,x) \in \mathcal{D}|\, ||x - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| \leq \rho_0\}$$

Sea L la constante de Lipschitz de f en el compacto T_0, y defino $\rho_1 = \rho_0 e^{-L|b-a|}$ y el tubo:

$$T_1 = \{(t,x) \in \mathcal{D}|\, ||x - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| \leq \rho_1\}$$

Sea $(s,y) \in T_1$ y $t \in [a,b] \cap J_{s,y}$. Entonces:

$$||\gamma_{s,y}(t) - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| = ||\psi(t,s,y) - \psi(t,t_0,x_0)|| =$$

$$= ||\psi(t,t_0,\psi(t_0,s,y)) - \psi(t,t_0,x_0)|| \leq e^{L|t-t_0|}\,||\psi(t,s,y) - x_0||$$

$$||\psi(t,s,y) - \psi(t,t_0,x_0)|| = ||\psi(t,s,y) - \psi(t,s,\psi(s,t_0,x_0))|| \leq$$

$$\leq e^{L|t-s|}\,||y - \psi(s,t_0,x_0)|| \leq$$

$$\leq e^{L|b-a|}\,||y - \psi(s,t_0,x_0)|| \leq \rho_1 e^{L|b-a|} = \rho_0$$

Sabemos que el grafo de cualquier solución (que empieza en (s,y)) acaba saliendo de T_0, y como no sale por «el lateral» debe salir por «las tapas» del tubo, por lo que $[a,b] \subset J_{s,y}$.

2. Θ es abierto. Dado un punto $(t_1,t_0,x_0) \in \Theta$, probaremos que existe un entorno de él que está contenido en Θ. Tomo $[a,b]$ tal que $t_1,t_0 \in (a,b)$ y defino T_0 y T_1 como en el apartado (1). Entonces, $[a,b] \times T_1 \subset \Theta$ y (t_1,t_0,x_0) está en su interior. Para todo $(s,y) \in T_1$ hemos visto que $[a,b] \subset J_{s,y}$ de forma que si $t \in [a,b]$ y $(s,y) \in T_1$ entonces $t \in J_{x,y}(t \in [a,b] \subset J_{s,y})$ que es lo mismo que decir $(t,s,y) \in \Theta$.

$$\Theta = \{(t,t_0,x_0) \,|\, (t_0,x_0) \in \mathcal{D} \wedge t \in J_{t_0,x_0}\}$$

En definitiva $[a,b] \times T_1 \subset \Theta$.

3. ψ es continua. Dado $(t_1,t_0,x_0) \in \Theta$ construyo el intervalo $[a,b]$ con $t_1,t_0 \in (a,b)$ y los tubos T_0 y T_1. Sea $M > 0$.

$$M = \max_{(t,x)\in T_0} ||f(t,x)||$$

Para cada pareja de puntos $(t_1',t_0',x_0'), (t_1'',t_0'',x_0'') \in [a,b] \times T_1$, se da:

$$\left|\left|\psi\left(t_1',t_0',x_0'\right) - \psi\left(t_1'',t_0'',x_0''\right)\right|\right| =$$

$$= \left|\left|\underbrace{\psi\left(t_1',t_0',x_0'\right) - \psi\left(t_1',t_0'',x_0''\right)}_{=:(1)} + \underbrace{\psi\left(t_1',t_0'',x_0''\right) - \psi\left(t_1'',t_0'',x_0''\right)}_{=:(2)}\right|\right|$$

Vamos a ver que tanto las expresiones (1) como (2) están acotadas. Vamos con (2):

$$\left|\left|\psi\left(t_1',t_0'',x_0''\right) - \psi\left(t_1'',t_0'',x_0''\right)\right|\right| =$$

$$\left|\left|x_0'' + \int_{t_0''}^{t_1'} f\left(\tau,\psi\left(\tau,t_0'',x_0''\right)\right)d\tau - x_0'' - \int_{t_0''}^{t_1''} f\left(\tau,\varphi\left(\tau,t_0'',x_0''\right)\right)d\tau\right|\right| =$$

$$= \left|\left|\int_{t_1''}^{t_1'} f\left(\tau,\psi\left(\tau,t_0'',x_0''\right)\right)d\tau\right|\right| \leq \left|\int_{t_1''}^{t_1'} \left|\left|f\left(\tau\right),t_0'',x_0''\right|\right| d\tau\right| \leq \left|\int_{t_1''}^{t_1'} M d\tau\right| \leq$$

$$\leq M\left|t_1' - t_1''\right|$$

Vamos con (1):

$$\left|\left|\psi\left(t_1',t_0',x_0'\right) - \psi\left(t_1',t_0'',x_0''\right)\right|\right| =$$

$$= \left|\left|\psi\left(t_1',t_0',x_0'\right) - \psi\left(t_1',t_0',\psi\left(t_0',t_0'',x_0''\right)\right)\right|\right|$$

Recordemos la propiedad que nos dice que las soluciones se separan como mucho exponencialmente. De esta forma, podemos acotar:

$$(1) \leq e^{L\left|t_1'-t_0'\right|}\left|\left|x_0' - \psi\left(t_0',t_0'',x_0''\right)\right|\right| \leq$$

$$\leq e^{L(b-a)} \left|\left| x_0' - x_0'' + \int_{t_0''}^{t_0'} f\left(\tau, \psi\left(\tau, t_0'', x_0''\right)\right) d\tau \right|\right| \leq$$

$$\leq e^{L(b-a)} \left(\left|\left| x_0' - x_0'' \right|\right| + \left|\left| \int_{t_0''}^{t_0'} f\left(\tau, \psi\left(\tau, t_0'', x_0''\right)\right) d\tau \right|\right| \right) \leq$$

$$\leq e^{L(b-a)} \left(\left|\left| x_0' - x_0'' \right|\right| + \left| \int_{t_0''}^{t_0'} \left|\left| f\left(\tau, t_0'', x_0''\right) \right|\right| d\tau \right| \right) \leq$$

$$\leq e^{L(b-a)} \left(\left|\left| x_0' - x_0'' \right|\right| + \left| \int_{t_0''}^{t_0'} N d\tau \right| \right) \leq$$

$$\leq e^{L(b-a)} \left(\left|\left| x_0' - x_0'' \right|\right| + N \left| t_0' - t_0'' \right| \right)$$

Juntando los términos, obtenemos:

$$\left|\left| \psi\left(t_1', t_0', x_0'\right) - \psi\left(t_1'', t_0'', x_0''\right) \right|\right| \leq$$

$$\leq e^{L(b-a)} \left(\left|\left| x_0' - x_0'' \right|\right| + N \left| t_0' - t_0'' \right| \right) + M \left| t_1' - t_1'' \right|$$

Ya ahora, claramente al hacer tender $x_0' \to x_0''$, $t_0' \to t_0''$ y $t_1' \to t_1''$, lo anterior tiende a cero, por lo que la función es continua. Es más, la función es Lipschitz en todas las variables.

□

14.1. Dependencia de parámetros

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(t, x, \mu\right) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

$$x = \psi\left(t, t_0, x_0, \mu_0\right)$$

Teorema 46. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ abierto y $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y tal que para cada (t_0, x_0, μ_0) existe un entorno (t_1, x_1, μ_1) en $\mathcal{D}$ satisfaciendo:*

$$\left|\left| f\left(t, y, \mu\right) - f\left(t, x, \mu\right) \right|\right| \leq L_\mu \left|\left| y - x \right|\right|$$

$\forall \left(t, y, \mu\right), \left(t, x, \mu\right)$ en dicho entorno. Entonces la solución general $x = \psi\left(t, t_0, x_0, \mu_0\right)$ es una función continua en todo su dominio $\Theta = \{(t, t_0, x_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ t.q. $(t_0, x_0, \mu_0) \in \mathcal{D}, t \in J_{t_0, x_0, \mu_0}\}$.

Demostración. La demostración general es complicada. Por ello, vamos a suponer que f satisface:

$$\left|\left| f\left(t, \gamma, \nu\right) - f\left(t, x, \mu\right) \right|\right| \leq L \left|\left| (y, \nu) - (x, \mu) \right|\right|$$

Definimos el problema de valor inicial diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(t, x, y\right) \\ \dot{y} = 0 \\ x\left(t_0\right) = x_0 \\ y\left(t_0\right) = \mu_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ y\left(t_0\right) = \mu_0 \end{cases} \Rightarrow y\left(t\right) = \text{cte}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x = \psi(t, t_0, x_0, \mu_0)$$

Así, la solución general de x es:

$$\Psi(t, t_0, x_0, \mu_0) = (\psi(t_0, x_0, x_0, \mu_0), \mu_0)$$

En las condiciones dadas, Ψ es continua en Θ, por lo que su primera componente $\psi(t, t_0, x_0, \mu_0)$ es una función continua. □

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = p \end{cases}, \quad f(t, p) = 0$$

En este caso $x(t) = p = \text{cte}$ es una solución.

Ahora nos preguntamos, cuál es el dominio de la solución maximal para valores de x_0 cercanos a p.
$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ con $x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ con $t \in J_{t_0,x_0}$ y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto.

$$\psi(t, t_0, x_0) = \gamma_{t_0,x_0}(t)$$

$$\Theta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ t.q. } (t_0, x_0) \in \mathcal{D} \wedge t \in J_{t_0,x_0}\}$$

Probamos que ψ era continua en Θ abierto.

14.2. Diferenciablidad

Teorema 47. *Sea $f : \mathcal{D} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua en $\mathcal{D}$ abierto. Supongamos que existen y son continuas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$ con $i, j = 1, \ldots, n$. Entonces la solución general maximal ψ es una función de clase $C^{(1)}$en el abierto Θ.*

Fijado $(t, t_0, x_0) \in \Theta$, sea $A(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ la matriz dada por:

$$A(t) = \mathrm{D}_x f(t, \psi(t, t_0, x_0))$$

Las derivadas parciales de ψ se obtienen como sigue:

- *$X(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$ es la solución de la ecuación diferencial lineal $\dot{X} = A(t) X$ con condición inicial $X(t_0) = -f(t_0, x_0)$.*
- *$X(t) = \mathrm{D}_{x_0}\psi(t, t_0, x_0) w$ (con $w \in \mathbb{R}^n$) es la solución de la ecuación diferencial lineal $\dot{X} = A(t) X$ con condición inicial $X(t_0) = w$.*

Observación 27. Recordemos que si tenemos $\varphi : \theta \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, la derivada de φ en $a \in \theta$ según $w \in \mathbb{R}^n$ cumple:

$$\mathrm{D}\varphi(a) w = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\varphi(a + hw)\right]_{h=0}$$

Si tenemos una función que depende de dos grupos de variable $\varphi(x, y)$, entonces se cumple:

$$\mathrm{D}_x\varphi(a, b) v = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\varphi(a + hv, b)\right]_{h=0}$$

Sólo de la segunda parte, suponiendo cierta la primera.

$$X(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi(t, t_0 + h, x_0)\right]_{h=0}$$

Sabemos que ψ satisface:

$$\psi(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau, t_0, x_0))\,\mathrm{d}\tau \quad \forall (t, t_0, x_0) \in \Theta$$

En particular:

$$\psi(t, t_0 + h, x_0) = x_0 + \int_{t_0+h}^{t} f(\tau, \psi(\tau, t_0 + h, x_0))\,\mathrm{d}\tau$$

en un intervalo centrado en 0 de h. Ahora, derivamos. Nótese que siempre se da la siguiente equivalencia:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En particular, si la ecuación es lineal:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) X(\tau)\,\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ahora, derivemos el derivando (lo que ha de ser derivado):

$$X(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi(t, t_0 + h, x_0)\right]_{h=0} =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(x_0 + \int_{t_0+h}^{t} f(\tau, \psi(\tau, t_0 + h, x_0))\,\mathrm{d}\tau\right)\right]_{h=0}$$

Por la regla de Leibniz de derivación bajo el signo integral:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} F(t, x)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t + F(b(x), x)\, b'(x) - F(a(x), x)\, a'(x)$$

Así:

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(x_0 + \int_{t_0+h}^{t} f(\tau, \psi(\tau, t_0 + h, x_0))\,\mathrm{d}\tau\right)\right]_{h=0} = \left[0 - f(t_0 + h, x_0) \cdot 1 + \int_{t_0+h}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} f(\tau, \psi(\tau, t_0 + h, x_0)\,\mathrm{d}\tau)\right]_{h=0} =$$

$$= -f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\mathrm{D}_x f(\tau, \psi(\tau t_0, x_0))}_{=A(\tau)} \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi(\tau, t_0 + h, x_0)\right]_{h=0}}_{=X(\tau)} \mathrm{d}\tau$$

De esta forma, hemos llegado a:

$$X(t) = -f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} A(\tau) X(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = -f(t_0, x_0) \end{cases}$$

Vamos con la segunda parte de la demostración. Sea $w \in \mathbb{R}^n$. Tenemos que probar:

$$X(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi(t, t_0, x_0 + h\omega)\right] = \mathrm{D}_{x_0}\psi(t, t_0, x_0)\, w$$

Para ello:

$$X(t)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi\left(t,t_0,x_0+hw\right)\right]_{h=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[x_0+hw+\int_{t_0}^{t}f\left(\tau,\psi\left(\tau,t_0,x_0+hw\right)\right)\mathrm{d}\tau\right]_{h=0}=$$

$$=w+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[f\left(\tau,\psi\left(\tau,t_0,x_0+hw\right)\right)\right]_{h=0}\mathrm{d}\tau=$$

$$=w+\int_{t_0}^{t}\left[\mathrm{D}_x f\left(\tau,\psi\left(\tau,t_0,x_0+hw\right)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi\left(\tau,t_0,x_0+hw\right)\right]_{h=0}\mathrm{d}\tau=$$

$$=w+\int_{t_0}^{t}\underbrace{\mathrm{D}_x f\left(\tau,\psi\left(\tau,t_0,x_0\right)\right)}_{=A(t)}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi\left(\tau,t_0,x_0+hw\right)\right]_{h=0}}_{=X(\tau)}\mathrm{d}\tau$$

Así, hemos obtenido:

$$X(t)=w+\int_{t_0}^{t}A(\tau)X(\tau)\,d\tau\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{X}=A(t)X\\ X(t_0)=w\end{cases}$$

□

Ejemplo 95.

$$\begin{cases}\dot{x}=t-x+2\\ \dot{y}=e^{x-1}\end{cases}$$

Con $t_0=0$ es $(x_0,y_0)=(1,1)$. Queremos calcular:

$$\gamma_{t_0=0,(x_0,y_0)=(1,1)}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=t-x+2\\ \dot{y}=e^{x-1}\\ x(0)=1\\ y(0)=1\end{cases}$$

La solución es:

$$\begin{cases}x=t+1\\ y=e^{t}\end{cases}$$

Así:

$$\gamma_{t_0=0,(x_0,y_0)=(1,1)}=\left(t+1,e^{t}\right)$$

$$\mathrm{D}_{(x,y)}f\left(t,(x,y)\right)=\begin{pmatrix}-1&0\\ e^{x-1}&0\end{pmatrix}$$

$$A(t)=\mathrm{D}_{(x,y)}f\left(t,x(t),y(t)\right)=\left[\begin{pmatrix}-1&0\\ e^{x-1}&0\end{pmatrix}\right]_{\substack{x=t+1\\ y=e^{t}}}=\begin{pmatrix}-1&0\\ e^{t}&0\end{pmatrix}$$

Hallemos la derivada con respecto de t_0:

$$X(t)=\frac{\partial\psi}{\partial t_0}\left(t,t_0=0,(x_0,y_0)=(1,1)\right)$$

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}-1&0\\ e^{t}&0\end{pmatrix}X$$

con $X(0) = -f(0,(1,1)) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Resolviendo, obtenemos:

$$X(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -t-1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial t_0}(t,0,(1,1))$$

Vamos con la derivada con respecto a x_0:

$$X(t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_0}(t,t_0,(x_0,y_0))$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ e^t & 0 \end{pmatrix} X$$

con $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo, obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_0}(t,t_0,(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ t \end{pmatrix}$$

Vamos con la parcial con respecto a y_0.

$$X(t) = \frac{\partial \psi}{\partial y_0}(t,0,(1,1))$$

$$\dot{X} = A(t)X$$

con $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Resolviendo, obtenemos:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación:

$$\dot{X} = A(t)X$$

recibe el nombre de ecuación varicional lineal o linealización de la ecuación diferencial a lo largo de la solución $x = \gamma_{t_0,x_0}$.

Teorema 48. *Si f es de clase $C^{(r)}$ con $r \geq 1$, entonces la solución general también es de clase $C^{(r)}$.*

14.3. Dependencia con respecto a parámetros

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x = \psi(t,t_0,x_0,\mu)$$

Teorema 49. *Supongamos que $D_x f(t,x)$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial \mu}(t,x,\mu)$ es continua. Entonces la solución general $x = \psi(t,t_0,x_0,\mu)$ es una función de clase $C^{(1)}$.*

La derivada parcial $X(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(t,t_0,x_0,\mu_0)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t,\psi(t,t_0,x_0,\mu)) \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

Demostración. Tenemos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Reescribimos este problema de valor inicial como:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = \mu \end{cases}$$

$$(x, y) = (\psi(t, t_0, x_0, \mu), \mu)$$

$D_{(x,y)} f$ es continua, por tanto, la solución general es de clase $C^{(1)}$; en particular la primera componente $x(t)$ es de clase $C^{(1)}$.

$$\psi(t, t_0, x_0, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau, t_0, x_0, \mu), \mu)\, \mathrm{d}\tau$$

$$\psi(t, t_0, x_0, \mu + h) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(t_0, x_0, \mu + h), \mu + h)\, \mathrm{d}\tau$$

Así:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu}(t, t_0, x_0, \mu) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\psi(t, t_0, x_0, \mu + h)\right]_{h=0} =$$

$$= 0 + \int_{t_0}^{t} \left[\mathrm{D}_x f(\tau, \psi(\tau, t_0, x_0, \mu + h), \mu + h)\frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\tau, t_0, x_0, \mu + h) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\tau, \psi(\tau, t_0, x_0, \mu + h), \mu + h) \cdot 1\right]_{h=0} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(\tau) X(\tau) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\tau, \psi(\tau, t_0, x_0, \mu), \mu)\, \mathrm{d}\tau$$

Que equivale a:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t) X + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \psi(t, t\prime, x_0, \mu), \mu) \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 96.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Tenemos que hallar las derivadas parciales de la solución general con respecto a t_0, x_0, μ en $(t, t_0 = 0, x_0 = 1, \mu = 0)$.

El primer paso es hallar la solución con dichos valores iniciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$A(t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t), \mu = 0) = [2x]_{\substack{x = \frac{1}{1-t} \\ \mu = 0}} = \frac{2}{1-t}$$

$$b(t) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t), \mu = 0) = [1]_{\substack{x = \frac{1}{1-t} \\ \mu = 0}} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{2}{1-t}X + 1 \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2}{1-t}\mathrm{d}t = -2\ln|1-t|$$

$$X(t) = \int_0^t e^{\ln\left[\left(\frac{1-t}{1-\tau}\right)^2\right]} 1\mathrm{d}\tau = \int_0^t \left(\frac{1-t}{1-\tau}\right)^2 \mathrm{d}\tau$$

14.3.1. Forma alternativa de obtener las derivadas de ψ a través de las ecuaciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,t_0,x_0) = f(t,\psi(t,t_0,x_0)) \\ \psi(t_0,t_0,x_0) = x_0 \end{cases}$$

$$X(t) = \frac{\partial\psi}{\partial t_0}(t,t_0,x_0)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial t_0}(t,t_0,x_0) = \underbrace{\mathrm{D}_x f(t,\psi(t,t_0,x_0))}_{=A(t)} \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t_0}(t,t_0 x_0)}_{=X(t)} \Leftrightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t_0\partial t}(t,t_0,x_0) = A(t)X(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t_0}\right)}_{=X(t)}(t,t_0,x_0) = A(t)X(t) \Leftrightarrow \dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

$$\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,t_0 x_0)}_{=f(t_0,\psi(t_0,t_0,x_0))} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t_0}(t_0,t_0,x_0)}_{=X(t_0)} = 0 \Leftrightarrow X(t_0) = -f(t_0,x_0)$$

Ejemplo 97 (El problema de los peces)**.**

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1-x) - p \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde p es un parámetro. El dinero viene dado por:

$$c = \beta x(T) + \alpha p T$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}p} = \beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(T) + \alpha T$$

$$\dot{x} = rx(1-x) - p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}p} = r(1-2x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - 1 \longleftrightarrow \dot{X} = r(1-2x)X - 1$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(0) = 0$$

De forma que llegamos al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1-x) - p \\ \dot{X} = r(1-2x)X - 1 \\ x(0) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Nuestro objetivo es buscar p tal que $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}p} = 0$ y $\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}p^2} < 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{x}}{\mathrm{d}p^2} = -2r\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\right)^2 + r\left(1-2x\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}p^2} \longleftrightarrow \dot{Y} = -2rX^2 + r\left(1-2x\right)Y$$

De forma que llegamos al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1-x\right) - p \\ \dot{X} = r\left(1-2x\right)X - 1 \\ \dot{Y} = -2rX^2 + r\left(1-2x\right)Y \\ x\left(0\right) = x_0 \\ X\left(0\right) = 0 \\ Y\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

14.3.2. Sistemas caóticos

Por ejemplo, la ecuación de Lorenz.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\left(y-x\right) \\ \dot{y} = x\left(\rho-z\right) - y \\ \dot{x} = xy - \beta z \end{cases}$$

donde $\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}$. Los sistemas de este estilo se llaman sensibles respecto a cambios en condiciones iniciales.

15. Trabajos

- Introducción
- Planteamiento del problema
- Resolución, simulación y gráficas (código empleado)
- Conclusiones
- Bibliografía

15.1. Ejemplos

- Crecimiento de poblaciones.
- Modelos de predador-presa.
- Dispersión de enfermedades (SIR y derivadas).
- Propagación de la viruela (Berrnouilli).
- Trayectoria del Halley.
- Tiro parabólico real contra el ideal.
- Péndulo de Foucault.
- Efecto Magnus.
- El pozo y el péndulo.

16. Propiedades cualitativas

16.1. Estabilidad

Supongamos que $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ tiene solución única. Siendo $x = \gamma_{t_0,x_0}(t) = \psi(t, t_0, x_0)$.

Definición 25. Se dice que la solución $x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ es **estable** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $||y_0 - x_0|| < \delta$, entonces:

$$||\psi(t, t_0, y_0) - \psi(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

En esta definición se supone que $[t_0, \infty) \subset J_{t_0,y_0}$.

La solución es **inestable** si no es estable.

Se dice que $x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que si se da $||y_0 - x_0|| < \delta$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} ||\gamma_{t_0,y_0}(t) - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| = 0$$

Teorema 50. *Consideremos un sistema lineal $\dot{X} = A(t)X + b(t)$ con $A(t), b(t)$ continuas en $[t_0, \infty)$. Son equivalentes:*

1. *Una solución del sistema es estable.*
2. *La solución nula del sistema homogéneo es estable.*
3. *El sistema es estable (todas las soluciones del sistema homogéneo está acotadas).*

Demostración.

- $1 \Leftrightarrow 2$: Tenemos el sistema:

$$X(t) = R(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) b(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

donde $X(t) = \gamma_{t_0,x_0}(t)$. Cualquier otra solución:

$$X(t) = R(t, t_0) Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) b(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

Estudiemos:

$$Y(t) - X(t) = R(t, t_0) Y_0 - R(t, t_0) X_0 = R(t, t_0)(Y_0 - X_0)$$

que es una solución del sistema homogéneo.

Consideramos una solución del sistema homogéneo $\gamma_{t,0}(t) = 0$.

$$Z(t) = R(t, t_0) Z_0$$

$$Z(t) - \gamma_{t,0}(t) = R(t, t_0) Z_0$$

Que (1) sea estable implica: $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $||Y_0 - X_0|| < \delta$, entonces $||R(t, t_0)(Y_0 - X_0)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$. Por otra parte que (2) sea estable, implica: $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||Z_0 - 0|| < \delta \Rightarrow ||R(t, t_0) Z|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$. Tomando $Z_0 = Y_0 - X_0$ probamos la equivalencia.

- 2 $\Rightarrow$ 3: $\forall\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||Z_0|| < \delta \Rightarrow ||R(t,t_0)\,Z_0|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$. Tomo $\varepsilon > 0$ y consideramos $\delta > 0$. Sea: $Z_0 = \frac{\delta}{2}(1,0,\ldots,0)$, entonces $||Z_0|| = \frac{\delta}{2} < \delta$, de donde:

$$\left\|\frac{\delta}{2}R(t,t_0)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow ||R(t,t_0)_{\text{col }1}|| < \frac{2\varepsilon}{\delta} \quad \forall t \geq t_0$$

  Análogamente actuamos con todos los vectores de la base canónica. De esta forma, todas las columnas están acotadas en $[t_0,\infty)$. Por tanto, toda solución es combinación lineal de funciones acotadas.

- 3 $\Rightarrow$ 2: Por definición, tenemos:

$$\dot{X} = A(t)\,X \text{ estable} \Leftrightarrow ||R(t,t_0)|| \leq M$$

  Por otra parte, también por definición, tenemos:

$$X(t) = 0 \text{ estable} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0, ||Y_0 - 0|| < \delta \Rightarrow ||Y(t) - 0|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

  donde $Y(t) = R(t,t_0)\,Y_0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomo $\delta = \frac{\varepsilon}{nM} > 0$ y si $||Y_0|| < \delta$, entonces:

$$||Y(t) - 0|| = ||R(t,t_0)\,Y_0|| \leq n\,||R(t,t_0)||\,||Y_0|| < n\,||R(t,t_0)||\,\delta < nM\delta = \varepsilon$$

□

Teorema 51. *Son equivalentes:*

1. *Una solución de $\dot{X} = A(t)\,X + b(t)$ es asintóticamente estable.*
2. *La solución trivial de $\dot{X} = A(t)\,X$ es asintóticamente estable.*
3. *El sistema $\dot{X} = A(t)\,X$ es asintóticamente estable.*

Demostración. Ejercicio. □

16.2. Estabilidad de soluciones de equilibrio de sistemas autónomos (no necesariamente escalar)

Consideramos $\dot{x} = f(x)$ con $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana.

Definición 26. Un punto $p \in \mathcal{D}$ es un punto de equilibrio si la función $x(t) = p$ (constante) es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$.

p es punto de equilibrio si y sólo si $f(p) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = 0$$

$$f(x(t)) = f(p)$$

Sea $x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ estable. Entones, por definición: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $||y_0 - x_0|| < \delta \Rightarrow ||\gamma_{t_0,y_0}(t) - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$. Análogamente, $x = \gamma_{t_0,x_0}(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además $\exists\delta > 0$ tal que si $||y_0 - x_0|| < \delta$ entonces $\lim\limits_{t\to\infty} ||\gamma_{t_0,y_0}(t) - \gamma_{t_0,x_0}(t)|| = 0$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que es $t_0 = 0$ ya que es autónomo.

$$\gamma_{t_0,x_0} = \gamma_{0,x_0} = \gamma_{x_0}$$

Si $x_0 = p$ es un punto de equilibrio, entonces $\gamma_p(t) = p$ constante. Así p es punto de equilibrio estable si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $||y_0 - p|| < \delta$, entonces $||\gamma_{y_0}(t) - p|| < \varepsilon$.

Además, p es punto de equilibrio asintóticamente estable si y solo si $\forall t \geq 0$, p es estable y, además, $\exists \delta > 0$ tal que si $||y_0 - p|| < \delta$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} ||\gamma_{y_0}(t) - p|| < \varepsilon$.

16.2.1. Caso escalar

Dibujamos el diagrama de fases:

$$\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow$$

Consideremos todas las posibles combinaciones:

$\rightarrow\leftarrow$: estable y, además, asintóticamente estable

$\rightarrow\rightarrow$: inestable

$\leftarrow\leftarrow$: inestable

$\leftarrow\rightarrow$: inestable

Si consideramos las funciones $\dot{x} = x^2$, $\dot{x} = x^2$, $\dot{x} = x^3$ y $\dot{x} = -x^3$. Únicamente para $\dot{x} = -x^3$ es $x = 0$ un punto de equilibrio estable.

Por último consideremos $\dot{x} = ax$:

- Si es $a > 0$, entonces tenemos $\leftarrow\rightarrow$ y $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable.
- Si es $a < 0$, entonces tenemos $\rightarrow\leftarrow$ y $x = 0$ es un punto de equilibrio estable.
- Si es $a = 0$, entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable.

16.2.2. Caso general

$\dot{x} = f(x)$ y $f(p) = 0$.

$$\psi(t,0,y_0) - p = \psi(t,0,y_0) - \psi(t,0,p) = \mathrm{D}_{x_0}\psi(t,0,p)(y_0 - p) + r(t,y_0,p) + r(t,y_0,p)$$

Y sabemos que:

$$\lim_{y_0\to p} \frac{r(t,y_0,p)}{||y_0 - p||} = 0$$

Recordemos la ecuación variacional:

$$\begin{cases} \dot{X} = \mathrm{D}f(p)\,x \\ X(0) = y_0 - p \end{cases}$$

pues probamos en su día que:

$$X = \mathrm{D}_{x_0}\psi(t,t_0,x_0)\,w_0$$

era solución del problema de valor inicial $\begin{cases} \dot{X} = A(t)\,X \\ X(t_0) = w_0 \end{cases}$ con $A(t) = \mathrm{D}_x f(t,\psi(t,t_0,x_0))$. En nuestro caso es:

$$A(t) = \mathrm{D}f(\gamma_p(t)) = \mathrm{D}f(p)$$

Teorema 52. *Sea p un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ con f de clase $C^{(1)}$ en un abierto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ y sea $A = \mathrm{D}f(p)$.*

- *Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio p es asintóticamente estable.*
- *Si existe un valor de propio de A con parte real positiva, entonces el punto de equilibrio p es inestable.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p = 0$. Llamemos $A = \mathrm{D}f(p)$. Como f es diferenciable, sabemos que se cumple:

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = Ax + r(x)$$

donde se cumple que:

$$\lim_{r \to 0} \frac{r(x)}{||x||} = 0$$

Por álgebra lineal, sabemos que dada $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, existe un producto escalar $\langle , \rangle$ tal que $\langle x, Ax \rangle \leq b \langle x, x \rangle$ donde $\mathrm{Re}(\lambda_i) < b$ para todo λ_i valor propio de A.

Como $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ para todo valor propio λ_i de A, tomo $\alpha > 0$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -\alpha$ y el producto escalar $\langle , \rangle$ como se acaba de decir:

$$\langle x, Ax \rangle \leq -\alpha \langle x, x \rangle$$

$$\frac{|\langle f(x) - Ax, x \rangle|}{\langle x, x \rangle} \leq \frac{|\varphi(x) - Ax|\,|x|}{|x|^2} = \frac{r(x)}{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donde $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha - \varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ implica:

$$\frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} < \varepsilon \Leftrightarrow \langle f(x), x \rangle < \langle x, Ax \rangle + \varepsilon \langle x, x \rangle \leq$$

$$\leq -\alpha \langle x, x \rangle + \varepsilon \langle x, x \rangle < -\underbrace{(\alpha - \varepsilon)}_{=:c} \langle x, x \rangle$$

Sea $x(t)$ una solución cualquiera con $|x(0)| < \delta$, entonces: consideramos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x(t), x(t) \rangle = 2 \langle x(t), \dot{x}(t) \rangle = 2 \langle x(t), f(x) \rangle = 2 \langle f(x), x(t) \rangle < -2c \langle x(t), x(t) \rangle$$

Por la desigualdad de Grönwall, para todo $t > 0$ se tiene que:

$$\langle x(t), x(t) \rangle \leq \langle x(0), x(0) \rangle \mathrm{e}^{-2ct}$$

o $|x(t)| = |x(0)| \mathrm{e}^{-ct}$. De aquí:

- $[0, \infty) \subset J_{0,x_0}$, es decir, $x(t)$ no sale de la bola cerrada $\overline{B(0, \delta)}$.
- $x(t) \in B(0, \delta)$, por lo que $p = 0$ es estable.
- $0 < \lim_{t \to \infty} |x(t)| \leq \lim_{t \to \infty} |x(0)| \mathrm{e}^{-ct} = 0$. Luego $p = 0$ es asintóticamente estable.

□

Ejemplo 98.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\sin x + \cos xy + z - 1 \\ \dot{y} = x^2 - y\cos x + xy \\ \dot{z} = -x^2 + 3y^2 - 4z \end{cases}$$

Consideremos $p = (0, 0, 0)$.

$$A = Jf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda = -2, -1, -4$. Por tanto $\mathrm{Re}(\lambda) < 0\ \forall \lambda$ y, por el teorema anterior, la solución de equilibrio es asintóticamente estable.

Ejemplo 99.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\sin x + y^2 + z \\ \dot{y} = x^2 - y^2 + xy \\ \dot{z} = -5y^2 + 4z \end{cases}$$

Estudiemos el punto $p = (0, 0, 0)$.

$$A = Jf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos $\lambda = -2, 0, 4$, luego $(0, 0, 0)$ es inestable.

Ejemplo 100.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^3 + z^2 \\ \dot{y} = -x - y^3 \\ \dot{z} = x^2 + y^2 - 2z \end{cases}$$

Consideremos $p = (0, 0, 0)$.

$$A = Jf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos los valores propios $\lambda = -2, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$. En este caso, el teorema anterior no nos dice nada.

Si hay valores propios con parte real nula (y el resto con parte real negativa), la aproximación lineal no puede decidir sobre la estabilidad. Si recordamos los ejemplos que vimos con dimensión 1, vemos que:

$$\dot{x} = x^3 \Rightarrow Jf(0) = 0 \quad \longleftarrow\!\!\!\!\cdot\!\!\!\!\longrightarrow \quad \Rightarrow \text{inestable}$$

$$\dot{x} = -x^3 \Rightarrow Jf(0) = 0 \quad \rightarrow\!\cdot\!\leftarrow \quad \Rightarrow \text{estable}$$

16.2.3. Funciones de Lyapunor V

Son aquellas que satisfacen:

- V tiene mínimo en p
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) \leq 0$

Demostración de lo que no hemos visto antes $\langle x, Ax\rangle \leq b\langle x, x\rangle$. Consideramos una base de vectores propios ortonormal (forzamos a que sea ortonormal) de $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

$$Ax = x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2$$

$$\langle x, Ax\rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \leq \text{máx}\left(\lambda_1, \lambda_2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \text{máx}\left(\lambda_1, \lambda_2\right)\langle x, x\rangle$$

16.3. Diagrama de fases

$\dot{x} = f\left(x\right)$

$$\begin{cases} \dot{x} = P\left(x, y\right) \\ \dot{y} = Q\left(x, y\right) \end{cases}$$

con P y Q de clase $C^{(1)}$.

$$\left(x_0, y_0\right) \to \begin{cases} x = \xi\left(t\right) \\ y = \zeta\left(t\right) \end{cases}$$

tiene solución única por el teorema de existencia y unicidad.

Consideremos $f\left(x, y\right) = \left(P\left(x, y\right), Q\left(x, y\right)\right) = \left(\dot{x}, \dot{y}\right)$ un vector velocidad.

Llamamos órbita a:

$$\left\{\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : t \in J_{0,\left(x_0, y_0\right)}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

16.3.1. Ecuación de las órbitas

$$\begin{cases} x = \xi\left(t\right) \\ y = \zeta\left(t\right) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{Q\left(x, y\right)}{P\left(x, y\right)} \Leftrightarrow P\left(x, y\right)\mathrm{d}y - Q\left(x, y\right)\mathrm{d}x = 0$$

siempre que $x = \xi\left(t\right)$ sea localmente invertible y $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$, es decir, $P\left(x, y\right) \neq 0$.

Igualmente, podemos hallar:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{P\left(x, y\right)}{Q\left(x, y\right)} \Leftrightarrow P\left(x, y\right)\mathrm{d}y - Q\left(x, y\right)\mathrm{d}x = 0$$

siempre que sea $y = \zeta\left(t\right)$ localmente invertible y $Q\left(x, y\right) \neq 0$. La ecuación anterior recibe el nombre de ecuación de las órbitas. La solución implícita $F\left(x, y\right)$ satisface:

$$\mathrm{d}F\left(x, y\right) = \mu\left[P\left(x, y\right)\mathrm{d}y - Q\left(x, y\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$F\left(x, y\right) = c$$

que son órbitas contenidas en conjuntos de nivel de F. La función potencial recibe el nombre de constante del movimiento o integral primera.

Ejemplo 101.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 - 1 \\ \dot{y} = 2x\left(y-1\right) \end{cases}$$

Queremos hallar las órbitas:

$$\left(2y - x^2 - 1\right)\mathrm{d}y - 2x\left(y-1\right)\mathrm{d}x = 0$$

Se puede comprobar que la anterior es exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Resolvemos por inspección visual:

$$F\left(x,y\right) = y^2 - y + x^2 - x^2 y = c \Leftrightarrow \left(y-1\right)\left(y-x^2\right) = c$$

Si dos órbitas «se cortan», entonces allí hay un punto de equilibrio.

16.3.2. Órbitas de un sistema lineal (en el plano)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

es la solución general. Sea u un vector propio asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA}u = e^{\lambda t}u$$

Suponiendo que la matriz A tiene subespacios todos de dimensión 1. Entonces el diagrama de fases queda como un conjunto de rectas, representando cada recta tres órbitas.

- A diagonalizable, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$ y $\mu < 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{x}} \\ \dot{\overline{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\overline{x}} = \lambda \overline{x} \\ \dot{\overline{y}} = \mu \overline{y} \end{cases}$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\overline{x}} = \lambda \frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\overline{y}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\lambda \overline{x}} = \frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mu \overline{y}} \Leftrightarrow c\left|x\right|^{\mu} = \left|y\right|^{\lambda} \Leftrightarrow \left|y\right| = c\left|x\right|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

Como es $\mu < 0$ y $\lambda > 0$, obtenemos:

$$\left|y\right| = \frac{c}{\left|x\right|^{a}}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Podemos hallar esto mismo resolviendo directamente la ecuación de las órbitas:

$$\begin{cases} \overline{x} = e^{\lambda t}\overline{x}_0 \\ \overline{y} = e^{\mu t}\overline{y}_0 \end{cases}$$

$$\frac{\overline{x}}{\overline{x}_0} = e^{\lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{\overline{x}}{\overline{x}_0}\right| = t$$

$$\overline{y} = e^{\frac{\mu}{\lambda}\ln\left|\frac{\overline{x}}{\overline{x}_0}\right|}\overline{y}_0 = \overline{y}_0\left|\frac{\overline{x}}{\overline{x}_0}\right|^{\frac{\mu}{\lambda}} = C\frac{1}{\overline{x}^{-\frac{\mu}{\lambda}}}$$

donde $-\frac{\mu}{\lambda} > 0$ ya que $\mu < 0$ y $\lambda > 0$. Esto es un punto silla.

- A diagonalizable con $\lambda > 0$ y $\mu > 0$.
$$\overline{y} = C\,|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$
nodo inestable.
- A diagonalizable con $\lambda < 0$ y $\mu < 0$. Entonces el nodo es estable.
- A no diagonalizable con $\lambda > 0$. Nodo impropio inestable.
- A no diagonalizable y $\lambda < 0$. Nodo impropio estable.
- A diagonalizable con valores propios complejos: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$.
  - $\alpha = 0$:
$$\begin{pmatrix}\dot{\overline{x}}\\ \dot{\overline{y}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \beta\\ -\beta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$
  - $\alpha \neq 0$:
$$\begin{pmatrix}\dot{\overline{x}}\\ \dot{\overline{y}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = e^{\alpha t}e^{t\begin{pmatrix}0 & \beta\\ \beta & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} =$$
$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

  Tenemos un foco espiral inestable si $\alpha > 0$ y un foco inestable si $\alpha < 0$.

Ejemplo 102.

$$\begin{cases}\dot{x} = x + 2y\\ \dot{y} = -x - y\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow s^2 + 1 = 0 \Rightarrow \exists\text{centro}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 = c$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = c$$

Los ejes son los vectores propios.

16.3.3. Puntos de equilibro para sistemas no lineales.

Ejemplo 103.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 - 1 \\ \dot{y} = 2x\,(y-1) \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio son:

$$x = 0, y = \frac{1}{2}$$

$$y = 1, x = \pm 1$$

$$\mathrm{J}f\,(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

siendo $\lambda = 2$ y $\mu = -2$, que es un punto de silla.

$$\mathrm{J}f\,(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda = -2$ y $\mu = 2$ que, de nuevo es una silla.

Teorema 53. *Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f = (P, Q)$ de clase $C^{(1)}$ y sea p punto de equilibrio.*

- *Si el sistema linealizado en p es un punto silla, el diagrama de fases del lineal al del no lineal cerca de p. Existen dos curvas (uniones de órbitas) que cruzan el punto de equilibrio, que reciben el nombre de separatrices (o curvas o variedades estable y inestable).*
- *Si f es $C^{(2)}$ y el diagrama del linealizado es un nodo o un foco, entonces también se parecen.*
- *Si el diagrama de fases del sistema linealizado es un centro, el diagrama del sistema no lineal cerca de p puede ser un foco, un centro o un centro-foco.*
  - *Si la ecuación de las órbitas es exacta, o existe un factor integrante que está definido y no se anula en p, entonces el diagrama de fases del no lineal cerca de p es un centro.*
  - *Lo mismo ocurre si existe una constante del movimiento que sea $C^{(3)}$ cerca de p.*
  - *Si existe una simetría (reflexión en una recta que pasa por el punto de equilibrio de manera que el diagrama se queda igual) entonces es un centro.*

16.4. Determinación de nulclinas e isoclinas

Tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = P\,(x, y) \\ \dot{y} = Q\,(x, y) \end{cases}$$

- Nulclinas horizontales: el campo (P, Q) es horizontal, es decir, se da $Q\,(x, y) = 0$.
- Nulclinas verticales: el campo (P, Q) es vertical, es decir, se da $P\,(x, y) = 0$.
- Isoclinas: el campo (P, Q) satisface $P = Q$.

Ejemplo 104.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 - 1 \\ \dot{y} = 2x\,(y-1) \end{cases}$$

- Nulclinas horizontales:
$$2x\left(y-1\right)=0$$
Tenemos varias soluciones: $x=0$, $y=1$.
- Nuclinas verticales:
$$2y-x^2-1=0\Leftrightarrow y=\frac{1+x^2}{2}$$

Ejemplo 105.
$$\begin{cases}\dot{x}=x^2-y^2-1\\ \dot{y}=xy\end{cases}$$
Puntos de equilibrio:
$$\begin{cases}x^2-y^2-1=0\\ xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(y=0,x=\pm1\right)$$
$$\mathrm{J}f\left(1,0\right)=\left[\begin{pmatrix}2x&-2y\\ y&x\end{pmatrix}\right]_{(x,y)=(1,0)}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{J}f\left(-1,0\right)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
- nulclinas horizontales:
$$xy=0\Leftrightarrow x=0\vee y=0$$
- nulclinas verticales:
$$x^2-y^2-1=0\Leftrightarrow x^2-y^2=1$$

Ejemplo 106.
$$\ddot{x}+\sin x=0$$
$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\sin x\end{cases}$$
$$\left(\dot{x},\dot{y}\right)=\left(0,0\right)\Leftrightarrow\left(x,y\right)=\left(n\pi,0\right)$$
$$\mathrm{J}f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}0&1\\-\cos x&0\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{J}f\left(0,0\right)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\longleftrightarrow\lambda=\pm i\Rightarrow\text{centro}$$
$$\mathrm{J}f\left(0,\pi\right)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\longleftrightarrow\lambda=\pm1\Rightarrow\text{silla}$$
Los vectores propios de esta última matriz son:
$$1:\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},-1:\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$y\mathrm{d}y+\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}y^2+\left(1-\cos x\right)\right)$$
Es decir, la ecuación de las órbitas es exacta. Por tanto el centro del lineal es centro del no lineal.

Por otra parte, las nuclinas horizontales son $\sin x=0\Leftrightarrow x=n\pi$ y las verticales $y=0$.

16.5. Simetrías (reflexión sobre una recta)

Si tenemos simetría del eje Y:

$$\begin{cases} P(-x,y) = P(x,y) \\ Q(-x,y) = -Q(x,y) \end{cases}$$

Si tenemos simetría respecto del eje X:

$$\begin{cases} P(x,y) = -P(x,y) \\ Q(x,y) = -Q(x,y) \end{cases}$$

Ejemplo 107.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

$$\mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Los puntos de equilibrio son $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$. Los jacobianos correspondientes son:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y, respectivamente, se corresponden con un centro, otro centro, una silla y otra silla.

Para ver si los centros del lineal son centros del no lineal, debemos buscar simetrías. Para poder buscarlas hacemos un cambio de variable para centrar los puntos de equilibrio:

$$\overline{x} = x - 0$$

$$\overline{y} = y - 1$$

$$\dot{\overline{x}} = \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \overline{x}^2 - (\overline{y}+1)^2 = -\overline{x}^2 - \overline{y}^2 - 2\overline{y}$$

$$\dot{\overline{y}} = \dot{y} = xy = \overline{x}(\overline{y}+1)$$

$\dot{\overline{x}}$ es par en $\overline{x}$ y $\dot{\overline{y}}$ es impar en $\overline{x}$. Por tanto, hay simetría respecto al eje Y y, por consiguiente, el centro del lineal también será centro del no lineal.